Aufgabe 21.47

Lösen Sie die inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten a) $y' = -2y+3$, b) $y' = -2y+3\cos 4x$!

Verwenden Sie dabei zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung den Lösungsansatz in Form der rechten Seite („Störgliedansatz")!

Lösung:

homogen: $y'=-2y$, Ansatz: $y=Ce^{\lambda x}$, $\lambda e^{\lambda x}=-2e^{\lambda x}$, $-2-\lambda=0$, $\lambda=-2$,
allgemeine Lösung der homogenen Dgl.: $y=Ce^{-2x}$

inhomogen:

a) Inhomogenität: „rechte Seite": $c(x)=3$
Ansatz: $y(x)=A,\ \ y'(x)=0$

Einsetzen in inhomogene Dgl.: $0=-2A+3,\ A=\frac{3}{2}$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y=\frac{3}{2}$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y=Ce^{-2x}+\frac{3}{2}$

b) Inhomogenität: „rechte Seite": $c(x)=3\cos 4x\ \ (+0\sin 4x)$
Ansatz: $y(x)=A\cos 4x+B\sin 4x,\ \ y'(x)=-4A\sin 4x+4B\cos 4x$

Einsetzen in inhomogene Dgl.:
$-4A\sin 4x+4B\cos 4x=-2A\cos 4x-2B\sin 4x+3\cos 4x=(-2A+3)\cos 4x-2B\sin 4x$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{llll} \sin 4x: & -4A=-2B & B=2A & \\ \cos 4x: & 4B=-2A+3 & & 8A=-2A+3,\ A=\frac{3}{10},\ B=\frac{6}{10} \end{array}$$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y=\frac{3}{10}\cos 4x+\frac{6}{10}\sin 4x$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y=Ce^{-2x}+\frac{3}{10}\cos 4x+\frac{6}{10}\sin 4x$