Aufgabe 21.43

Ermitteln Sie die Lösungen folgender Randwertaufgaben, sofern diese existieren:

a) $y''+2y'+5y=0,\ \ y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0,$

b) $y''+2y'+5y=0,\ \ y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1,$

c) $y''+2y'+5y=0,\ \ y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,$

d) $y''+2y'+5y=0,\ \ y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,$

e) $y''+2y'+5y=0,\ \ y(0)=-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$!

Lösung:

$\lambda^2+2\lambda+5=0,\ \ \lambda_{1/2}=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2\mathrm{i},$
$y(x)=A\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+B\mathrm{e}^{-x}\sin 2x,\ \ y(0)=A,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=B\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}},\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-A\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$

a) $y(0)=A=0,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=B\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}=0,\ \ B=0$
Die homogene AWA hat nur die triviale Lösung $y(x)\equiv 0$.

b) $y(0)=A=1,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=B\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}=1,\ \ B=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$
Die inhomogene AWA hat die eindeutige Lösung $y(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-x}\sin 2x$.

c) $y(0)=A=0,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-A\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}=0:$ für $A=0$ erfüllt. B beliebig.
Die homogene AWA hat unendlich viele Lösungen $y(x)=B\mathrm{e}^{-x}\sin 2x$.

d) $y(0)=A=1,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-A\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}=1:$ für $A=0$ nicht erfüllt.
Die inhomogene AWA ist unlösbar.

e) $y(0)=A=-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-A\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}=1:$ für $A=-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$ erfüllt. B beliebig.
Die inhomogene AWA hat unendlich viele Lösungen $y(x)=-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-x}\cos 2x+B\mathrm{e}^{-x}\sin 2x$.

Vgl. Lösbarkeiteigenschaften linearer Gleichungssysteme: Ist das homogene System nur trivial lösbar, so ist das inhomogene System eindeutig lösbar. Ist das homogene System nichttrivial lösbar, so ist das inhomogene System unlösbar oder es hat unendlich viele Lösungen.