Aufgabe 21.36

Lösen Sie die folgenden homogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y'' - 4y' + 3y = 0$,
b) $y'' - 4y' + 13y = 0$,
c) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$,
d) $y^{(4)} - 16y = 0$,
e) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$!

Lösung:

Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:
Ableitungen nur durch Addition und Multiplikation mit Konstanten verknüpft:

$a_n y^{(n)} + a_{n-1}^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = c(x)$, homogen, falls kein absolutes Glied, d.h. $c(x) \equiv 0$.

Ansatz für homogene Differenzialgleichung: $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$, $\cdots$, $y^{(n)} = \lambda^n \mathrm{e}^{\lambda x}$

Einsetzen in homogene Differenzialgleichung: $(a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0)\,\mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \implies$
$a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$: Gesucht sind die Nullstellen λ dieses „charkteristischen Polynoms“

Ist λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so ist $\mathrm{e}^{\lambda x}$ eine spezielle Lösung der homogenen Differenzialgleichung. Eine homogene lineare Differenzialgleichung n–ter Ordnung hat n linear unabhängige Lösungen, die allgemeine Lösung ergibt sich durch Linearkombination dieser Lösungen.

Das charakteristische Polynom hat n Nullstellen. Probleme gibt es, wenn die Nullstellen komplex oder/und mehrfach sind.

a) charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, $\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 3; 1$, $y(x) = A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{x}$
(allg. Lsg. d. hom. Dgl.)

b) $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, $\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3\,\mathrm{i}$,
allgemeine komplexe Lösung: $y(x) = A\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x} + B\mathrm{e}^{(2-3\mathrm{i})x}$, A, B beliebig komplex

Suchen allgemeine reelle Lösung:
$$\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x),$$
$$\mathrm{e}^{(\alpha-\beta\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - \mathrm{i}\sin\beta x)$$

Wählt man $B = \overline{A}$, so entsteht die allgemeine reelle Lösung
$$y(x) = C\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + D\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, \text{ also:}$$
Zu den Nullstellen $\lambda = \alpha \pm \beta\mathrm{i}$ gehören die speziellen Lösungen $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ und $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$.

Konkret: $y(x) = C\mathrm{e}^{2x}\cos 3x + D\mathrm{e}^{2x}\sin 3x$

c) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) : (\lambda - 2) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

$$\begin{array}{r}
\lambda^3 - 2\lambda^2 \\
\hline
-4\lambda^2 + 12\lambda - 8 \\
-4\lambda^2 + 8\lambda \\
\hline
4\lambda - 8 \\
4\lambda - 8 \\
\hline
0
\end{array}$$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$, $\lambda_{1/2/3} = 2$

Ist λ n–fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so sind neben $\mathrm{e}^{\lambda x}$ auch $x\mathrm{e}^{\lambda x}$, $x^2\mathrm{e}^{\lambda x}$, $\ldots$, $x^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$ Lösungen der homogenen Differenzialgleichung („innere Resonanz“).

Damit liegen n spezielle Lösungen zu einer n–fachen Nullstelle vor. Analoges gibt auch bei komplexen Nullstellen.

Konkret: $y(x) = A\mathrm{e}^{2x} + Bx\mathrm{e}^{2x} + Cx^2\mathrm{e}^{2x}$

d) $\lambda^4 - 16 = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 2\mathrm{i})(\lambda + 2\mathrm{i}) = 0, \quad \lambda_{1/2/3/4} = \pm 2; \pm 2\mathrm{i}$

Achtung: Zu y gehört im charakteristischen Polynom λ^0 und nicht λ^1. Das wird oft falsch gemacht, wenn wie hier in der Differenzialgleichung kein y' vorkommt!

$y(x) = A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{-2x} + C\cos 2x + D\sin 2x$

Probe: $y^{(4)}(x) = 16A\mathrm{e}^{2x} + 16B\mathrm{e}^{-2x} + 16C\cos 2x + 16D\sin 2x, \;\; y^{(4)} - 16y = 0$

e) $\lambda^4 - 8\lambda^2 + 16 = 0, \;\; \lambda^2_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 16}, \;\; \lambda^4 - 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 - 4)^2 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)^2,$
$\lambda_{1/2} = 2, \lambda_{3/4} = -2, \quad y(x) = (A + Bx)\mathrm{e}^{2x} + (C + Dx)\mathrm{e}^{-2x}$