Aufgabe 21.35

Lösen Sie mithilfe des Ansatzes $y(x)=Ce^{\lambda x}$ folgende linearen homogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y' - 2y = 0$,
b) $y'' - 5y' + 6y = 0$,
c) $y'' + \omega^2 y = 0 \;\; (\omega > 0)$!

Hinweis: Wie bei der Lösung homogener linearer Gleichungssysteme ist jede Linearkombination, speziell also auch die Summe von Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung wieder Lösung dieser Differenzialgleichung. Nutzen Sie dies im Falle c), um reellwertige Lösungen der Differenzialgleichung anzugeben!

Lösung:

a) $y=Ce^{\lambda x}$, $y'=\lambda Ce^{\lambda x}$, Einsetzen in Dgl.: $\lambda Ce^{\lambda x}-2Ce^{\lambda x}=(\lambda-2)Ce^{\lambda x}=0 \iff \lambda-2=0$

(bzw. $C=0$, die Lösung $y\equiv 0$ ergibt sich aber auch als Spezialfall bei der Wahl von $\lambda=2$, da dann C beliebig ist)

$\lambda=2$, allgemeine Lösung der Dgl.: $y(x)=Ce^{2x}$, C beliebig

b) $y''=\lambda^2 Ce^{\lambda x}$, Einsetzen in Dgl.: $\lambda^2Ce^{\lambda x}-5\lambda^2Ce^{\lambda x}+6Ce^{\lambda x}=(\lambda^2-5\lambda+6)Ce^{\lambda x}=0$
$\iff \lambda^2-5\lambda+6=0$ (bzw. $C=0$ wie oben)

$\lambda_{1/2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{24}{4}}=2;\,3$, allgemeine Lösung der Dgl.: $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$, C_1,C_2 bel.

c) Einsetzen in Dgl. wie oben: $\lambda^2Ce^{\lambda x}+\omega^2Ce^{\lambda x}=(\lambda^2+\omega^2)Ce^{\lambda x}=0 \iff \lambda^2+\omega^2=0$

(bzw. $C=0$ wie oben)

$\lambda^2=-\omega^2$, $\lambda=\pm i\omega$,

allgemeine (komplexe) Lösung der Dgl.: $y(x)=C_1e^{i\omega x}+C_2e^{-i\omega x}$, C_1,C_2 beliebig komplex

Mit der Zerlegung in Real- und Imaginärteil $C_1=A_1+B_1 i$, $C_2=A_2+B_2 i$ erhält man

$$\begin{aligned} y(x) &= (A_1+B_1 i)(\cos\omega x+i\sin\omega x)+(A_2+B_2 i)(\cos\omega x-i\sin\omega x) \\ &= (A_1\cos\omega x-B_1\sin\omega x+A_2\cos\omega x+B_2\sin\omega x) \\ &\quad + i(A_1\sin\omega x+B_1\cos\omega x-A_2\sin\omega x+B_2\cos\omega x) \end{aligned}$$

Damit dies wie gewünscht immer reell wird, muss man $A_2=A_1$ und $B_2=-B_1$, d.h. $C_2=\overline{C_1}$ wählen. Dann ergibt sich die allgemeine reelle Lösung der Differenzialgleichung zu

$y(x)=2A_1\cos\omega x-2B_1\sin\omega x=D\cos\omega x+E\sin\omega x$, D,E beliebig reell.

Offensichtlich gilt dann $y''(x)=-\omega^2D\cos\omega x-\omega^2E\sin\omega x$, so dass die Differnzialgleichung $y''+\omega^2y=0$ tatsächlich erfüllt ist.