

Aufgabe 21.32

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y' - \frac{y}{2x+1} = 1$, $y(12) = 50$!

Lösung:

homogen: Trennung der Veränderlichen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x+1}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x+1}, \quad \ln y = \frac{1}{2} \ln(2x+1) + \ln C, \quad y = C\sqrt{2x+1}$$

(Der bei der Division durch y zu beachtende Sonderfall $y=0$ ist bei der Wahl von $C=0$ in dieser Lösung enthalten, streng genommen müsste außerdem

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + \ln C, \quad C > 0, \quad |y| = C\sqrt{|2x+1|}, \quad C > 0, \quad y = C\sqrt{2x+1}, \quad C \text{ beliebig reell}$$

(einschließlich $C=0$, da $y \equiv 0$ Lösung ist) geschrieben werden. Dies braucht aber letztlich nicht berücksichtigt werden, da die so entstehende Lösung eine Singularität in der Ableitung an der Stelle $x = -1/2$ hätte und deshalb als Lösung der Anfangswertaufgabe nur für $x > -1/2$ zu betrachten wäre, so dass die Betragsstriche wiederum weggelassen werden können.)

inhomogen: Variation der Konstanten: Ansatz: $y = C(x)\sqrt{2x+1}$

$$C'(x)\sqrt{2x+1} + C(x)\frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{C(x)\sqrt{2x+1}}{2x+1} = 1, \quad C'(x)\sqrt{2x+1} = 1, \quad C'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}},$$

$$C(x) = \sqrt{2x+1} + D$$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y = (\sqrt{2x+1} + D)\sqrt{2x+1} = 2x+1 + D\sqrt{2x+1}$

Anfangsbedingung: $y(12) = 25 + 5D = 50$, $5D = 25$, $D = 5$

Lösung der Anfangswertaufgabe: $y = 2x+1 + 5\sqrt{2x+1}$