

Aufgabe 21.31

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y' - 2\frac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 4$!

Lösung:

homogene Dgl.: $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}$, $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$, $\ln y = 2\ln x + \ln C$, $y(x) = Cx^2$
(Sonderfall $y=0$ und Beträge unter den Logarithmen wie üblich behandelt)

inhomogene Dgl.: Ansatz Variation der Konstanten: $y(x) = C(x)x^2$, $y'(x) = C'(x)x^2 + 2C(x)x$

$$y' - 2\frac{y}{x} = C'x^2 + 2Cx - 2\frac{Cx^2}{x} = C'x^2 = x^2, \quad C' = 1, \quad C(x) = x + D,$$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. also $y(x) = x^3 + Dx^2$

Anfangsbedingung: $y(1) = 1 + D = 4$, $D = 3$,

Lösung der Anfangswertaufgabe also $y(x) = x^3 + 3x^2$