Aufgabe 21.29

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' + \frac{x}{x^2+3}y = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$!

Lösung:

homogen: Trennung der Veränderlichen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x^2+3}y, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{x^2+3} = -\frac{1}{2}\frac{d(x^2+3)}{x^2+3},$$

(Dabei ist die Substitution $t=x^2+3$, $\frac{dt}{dx}=2x$, $\frac{1}{2}dt=x\,dx$ vorgenommen worden.)

$$\ln y = -\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+\ln C, \quad y = \frac{C}{\sqrt{x^2+3}}$$

$\big($Der bei der Division durch y zu beachtende Sonderfall $y=0$ ist bei der Wahl von $C=0$ in dieser Lösung enthalten, streng genommen müsste außerdem

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+\ln C,\ C>0, \quad |y| = \frac{C}{\sqrt{x^2+3}},\ C>0, \quad y = \frac{C}{\sqrt{x^2+3}},\ C \text{ beliebig reell}$$

(einschließlich $C=0$, da $y\equiv 0$ Lösung ist) geschrieben werden.$\big)$

inhomogen: Variation der Konstanten: Ansatz: $y = \frac{C(x)}{\sqrt{x^2+3}}$

$$\frac{C'(x)\sqrt{x^2+3}-C(x)\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3} - \frac{C(x)\,x}{\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}, \quad \frac{C'(x)}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}, \quad C'(x)=x,$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2}+D$$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+3}} + \frac{D}{\sqrt{x^2+3}}$