Aufgabe 21.27

Lösen Sie die Differenzialgleichung $y'(x) - y(x)\cos x = \sin x \cos x$!

Lösung:

homogene Dgl.: $y' = y\cos x,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \cos x\,\mathrm{d}x,\ \ln y = \sin x + \ln C,\ y_{\text{hom}}(x) = C\mathrm{e}^{\sin x}$
(Behandlung von Division durch 0 und Beträgen wie üblich)

inhom. Dgl.: Ansatz Variation der Konstanten: $y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{\sin x}$,
$y'(x) = C'(x)\,\mathrm{e}^{\sin x} + C(x)\,\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$

$C'\mathrm{e}^{\sin x} + C\mathrm{e}^{\sin x}\cos x - C\mathrm{e}^{\sin x}\cos x = \sin x\cos x,$

$C' = \mathrm{e}^{-\sin x}\sin x\cos x,\ C = \displaystyle\int \mathrm{e}^{-\sin x}\sin x\,\mathrm{d}\sin x,$

$\displaystyle\int \mathrm{e}^{-t}t\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}t + \int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}(t+1) + D,$

$$C = -\mathrm{e}^{-\sin x}(\sin x + 1) + D,\quad y(x) = \underbrace{\underbrace{-(\sin x + 1)}_{\substack{\text{spez. Lösung}\\ \text{inhom. Dgl.}}} + \underbrace{D\mathrm{e}^{\sin x}}_{\substack{\text{allg. Lösung}\\ \text{homog. Dgl.}}}}_{\text{allg. Lösung inhomog. Dgl.}},\quad D \in \mathbb{R}$$