Aufgabe 21.26

Ermitteln Sie für die inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung $y' + y = x\,\mathrm{e}^x$ die allgemeine Lösung sowie die spezielle Lösung, für die $y(1) = 0$ gilt!

Lösung:

Inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung (linear in gesuchter Funktion und ihren Ableitungen),

inhomogen durch absolutes Glied (enthält weder gesuchte Funktion noch ihre Ableitungen): rechte Seite (auch wenn das mal nicht rechts stehen sollte)

2 Schritte: – homogene Gleichung (absolutes Glied weglassen): Trennung der Veränderlichen
– inhomogene Gleichung: Variation der Konstanten: $C \longrightarrow$ Ansatz $C(x)$

homogene Dgl.: $y' + y = 0,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\mathrm{d}x,\ \ln y = -x + \ln C,\ y = C\mathrm{e}^{-x}$

(Bezüglich des Sonderfalls $y = 0$ und des Betrages unter dem Logarithmus liegt die übliche Situation vor, d.h., so wie die Rechnung notiert ist, ist sie in den Zwischenschritten formal nicht korrekt, stimmt aber im Ergebnis.)

(Da der homogene Anteil konstante Koeffizienten hat, kann die Lösung auch mit dem Ansatz $y = C\mathrm{e}^{\lambda x}$ ermittelt werden, was auf $\lambda = -1$ und damit die angegebene Lösung führt.)

inhomogene Dgl.:
Ansatz (Variation der Konstanten): $y = C(x)\mathrm{e}^{-x},\ y' = C'(x)\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x}$,

$$y' + y = C'(x)\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x} + C(x)\mathrm{e}^{-x} = C'(x)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{x},\ C'(x) = x\mathrm{e}^{2x}$$

$$C(x) = \int x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + D = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x} + D,$$

$$y(x) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{x}}_{\substack{\text{spez.Lsg.}\\\text{inhom.Dgl.}}} + \underbrace{D\ \mathrm{e}^{-x}}_{\substack{\text{allg.Lsg.}\\\text{hom.Dgl.}}}}_{\text{allg. Lsg. inhom. Dgl.}}$$

Anfangsbedingung: $y(1) = \dfrac{\mathrm{e}}{4} + \dfrac{D}{\mathrm{e}} = 0,\ D = -\dfrac{\mathrm{e}^2}{4},\ \underline{\underline{y(x) = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{x} - \dfrac{\mathrm{e}^{2-x}}{4}}}$