Aufgabe 21.24

Gegeben sei die Differenzialgleichung $x^2y'' + xy' - y = 0$.

a) Zeigen Sie, dass $y_1(x) = x$ eine spezielle Lösung dieser Differenzialgleichung ist!

b) Lösen Sie davon ausgehend die Differenzialgleichung allgemein durch Reduktion der Ordnung mit der Substitution $y(x) = y_1(x)u(x)$ und Lösung der sich dadurch ergebenden Differenzialgleichung für u' !

Lösung:

a) $y_1 = x,\ y_1' = 1,\ y_1'' = 0, \quad x^2y_1'' + xy_1 - y_1 = x - x = 0$, stimmt

b) $y = xu,\ y' = u + xu',\ y'' = 2u' + xu''$

$x^2y'' + xy' - y = 2x^2u' + x^3u'' + xu + x^2u' - xu = 0,\ x^3u'' + 3x^2u' = 0$

Substitution $t = u'$: $\ x^3t' + 3x^2t = 0 \qquad x\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -3t$

$$\frac{\mathrm{d}t}{t} = -3\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \text{bzw. } y = 0 \text{ (ist Lsg.)}$$

$$\ln|t| = -3\ln|x| + \ln C,\ C > 0$$

$$|t| = \frac{C}{x^3}, \qquad C > 0$$

$$t = \frac{C}{x^3},\ C \text{ bel. reell} (C = 0 \mathrel{\hat{=}} t = 0)$$

$$u = \int t\,\mathrm{d}x = \int \frac{C}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{C}{2x^2} + D = \frac{E}{x^2} + D, \quad y = \frac{E}{x} + Dx$$