Aufgabe 21.23

Für die Geschwindigkeit des freien Falls eines Körpers der Masse m gilt unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes die Differenzialgleichung $\dot{v}(t) = g - \frac{k}{m}v(t)$, wobei g die Erdbeschleunigung und k die Reibungskonstante bezeichnet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde ein Körper fallengelassen.

a) Geben Sie die Geschwindigkeit des Körpers als Funktion der Zeit an!
b) Welchen Wert kann die Geschwindigkeit nicht überschreiten, wenn $m = 50\,\mathrm{kg}$ und $k = 10\,\mathrm{kg/s}$ beträgt?

Lösung:

a) Anfangswertaufgabe: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{k}{m}v(t), \quad v(0) = 0$

Trennung der Veränderlichen: $\frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{k}{m}v} = \mathrm{d}t, \quad \int \frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{k}{m}v} = \int \mathrm{d}t,$

$$-\frac{m}{k}\ln\left(g - \frac{k}{m}v\right) = t + \ln C,$$

$$\ln\left(g - \frac{k}{m}v\right) = -\frac{k}{m}t + \ln C$$

$\left(-\frac{k}{m}\ln C \text{ wieder als } \ln C \text{ bezeichnet, da beliebige reelle Zahl}\right)$,

$$g - \frac{k}{m}v = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},$$

$$v = \frac{mg}{k} - C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

$\left(\frac{m}{k}C \text{ wieder als } C \text{ bezeichnet, da beliebige reelle Zahl}\right)$

(Bezüglich des Sonderfalls der Divison durch 0 und des Betrages unter dem Logarithmus liegt die übliche Situation vor, d.h., so wie die Rechnung notiert ist, ist sie in den Zwischenschritten formal nicht korrekt, stimmt aber im Ergebnis.)

Einsetzen der Anfangsbedingung: $v(0) = \frac{mg}{k} - C = 0, \quad C = \frac{mg}{k}, \quad \underline{\underline{v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)}}$

b) $v(t)$ ist wegen des mit wachsendem t fallenden Exponenten monoton wachsend, es gilt

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{k} = \frac{50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{10\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}} = \underline{\underline{49{,}05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}.$$