Aufgabe 21.22

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' = \dfrac{(9x-2)\,y}{x^2-x-6}$!

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(9x-2)\,y}{x^2-x-6}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{9x-2}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.} \qquad y=0\colon \boxed{y(x)\equiv 0} \text{ ist Lösung (1)}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\frac{9x-2}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x$$

Partialbruchzerlegung wie bei Aufgabe 13.27:

$$x^2-x-6=0,\ \ x_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}=\begin{cases}\ \ 3\\ -2\end{cases}$$

$$\frac{9x-2}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)} \implies 9x-2=(A+B)x+(2A-3B)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rcll} A+\ B &=& 9 & |\cdot 3\\ 2A-3B &=& -2 & |+\\ 3A+3B &=& 27 & |+ \end{array} \qquad 5A=25,\ \ A=5,\ B=4,\ \ \frac{9x-2}{(x-3)(x+2)} = \frac{5}{x-3}+\frac{4}{x+2}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\left(\frac{5}{x-3}+\frac{4}{x+2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = 5\ln|x-3|+4\ln|x+2|+D=\ln\left(|x-3|^5\,(x+2)^4\right)+\ln C=\ln\left(C|x-3|^5\,(x+2)^4\right),$$

$D=\ln C$ beliebig reell, $C>0$

$$|y| = C|x-3|^5\,(x+2)^4,\ C>0$$

Fallunterscheidung:

y, $x-3$ gleiches Vz.: $\boxed{y=C(x-3)^5\,(x+2)^4,\ C>0}$ (2)

y, $x-3$ ungleiches Vz.: $y=-C(x-3)^5\,(x+2)^4,\ C>0 \iff \boxed{y=C(x-3)^5\,(x+2)^4,\ C<0}$ (3)

Die Zusammenfassung von (1) bis (3) führt zur allgemeinen Lösung $y(x)=C(x-3)^5(x+2)^4$, $C\in\mathbb{R}$.

(An den Stellen $x=3$ und $x=-2$ könnte zwischen den Zweigen der Lösung gewechselt werden (Bifurkation), so dass sich weitere Lösungen ergeben würden.)