

Aufgabe 21.21

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' = \frac{(x+29)y}{x^2+3x-28}$!

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+29)y}{x^2+3x-28}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{dy}{y} = \frac{x+29}{x^2+3x-28} dx \quad \text{bzw.} \quad y=0: \boxed{y(x) \equiv 0} \text{ ist Lösung (1)}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x+29}{x^2+3x-28} dx$$

Partialbruchzerlegung wie bei Aufgabe 13.28:

$$x^2+3x-28=0, \quad x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{112}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2} = \begin{cases} 4 \\ -7 \end{cases}$$

$$\frac{x+29}{(x-4)(x+7)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+7} = \frac{A(x+7) + B(x-4)}{(x-4)(x+7)} \implies x+29 = (A+B)x + (7A-4B)$$

Koeffizientenvergleich:

$$A + B = 1 \quad | \cdot 4$$

$$7A - 4B = 29 \quad | +$$

$$4A + 4B = 4 \quad | + \quad 11A = 33, \quad A = 3, \quad B = -2, \quad \frac{x+29}{x^2+3x-28} = \frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+7}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+7} \right) dx$$

$$\ln|y| = 3 \ln|x-4| - 2 \ln|x+7| + D = \ln \frac{|x-4|^3}{(x+7)^2} + D = \ln \frac{|x-4|^3}{(x+7)^2} + \ln C = \ln \left(C \frac{|x-4|^3}{(x+7)^2} \right),$$

$$D = \ln C \text{ beliebig reell, } C > 0$$

$$|y| = C \frac{|x-4|^3}{(x+7)^2}, \quad C > 0$$

Fallunterscheidung:

$$y, x-4 \text{ gleiches Vz.: } \boxed{y = C \frac{(x-4)^3}{(x+7)^2}, \quad C > 0} \quad (2)$$

$$y, x-4 \text{ ungleiches Vz.: } y = -C \frac{(x-4)^3}{(x+7)^2}, \quad C > 0 \iff \boxed{y = C \frac{(x-4)^3}{(x+7)^2}, \quad C < 0} \quad (3)$$

Die Zusammenfassung von (1) bis (3) führt zur allgemeinen Lösung $y(x) = C \frac{(x-4)^3}{(x+7)^2}, \quad C \in \mathbb{R}$.

(An der Stelle $x=4$ könnte zwischen den Zweigen der Lösung gewechselt werden (Bifurkation), so dass sich weitere Lösungen ergeben würden.)