

Aufgabe 21.19

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = (\cos x^2)xy$!

Lösung:

Trennung der Veränderlichen

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x^2)xy, \quad \frac{dy}{y} = (\cos x^2)x dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int (\cos x^2)x dx = \int \cos x^2 \frac{dx^2}{2} = \frac{1}{2} \int \cos x^2 dx^2$$

(Dabei ist die Substitution $t = x^2$, $\frac{dt}{dx} = 2x$, $\frac{dt}{2} = x dx$ vorgenommen werden.)

$$\ln y = \frac{1}{2} \sin x^2 + \ln C, \quad y = C e^{\frac{1}{2} \sin x^2} = C \sqrt{e^{\sin x^2}}$$

(Der bei der Division durch y zu beachtende Sonderfall $y=0$ ist bei der Wahl von $C=0$ in dieser Lösung enthalten, streng genommen müsste außerdem

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \sin x^2 + \ln C, \quad C > 0, \quad |y| = C \sqrt{e^{\sin x^2}}, \quad C > 0, \quad y = C \sqrt{e^{\sin x^2}}, \quad C \text{ beliebig reell}$$

(einschließlich $C=0$, da $y \equiv 0$ Lösung ist) geschrieben werden.)