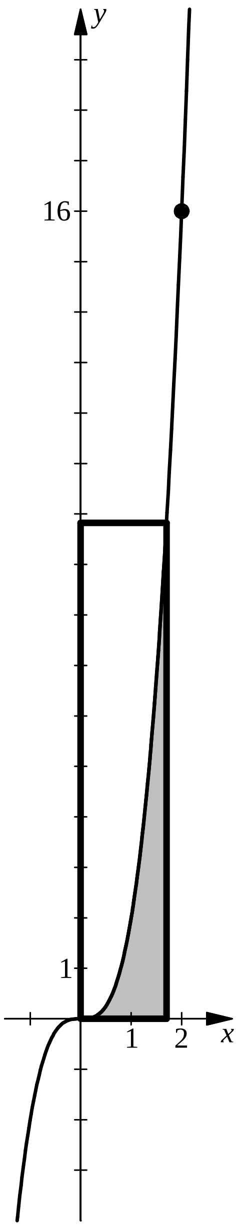
Aufgabe 21.12

Gesucht ist die Kurve $y = f(x)$, die durch den Punkt $(2,16)$ geht und für die in jedem Punkt $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ das von den Koordinatenachsen und den Geraden $x=\bar{x}$ und $y=f(\bar{x})$ begrenzte Rechteck viermal so groß ist wie die von den Koordinatenachsen, der Gerade $x=\bar{x}$ und der Kurve begrenzte Fläche.

Hinweis: Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$.

Lösung:



$$x\,f(x) = 4\int\limits_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\,f(x)) = 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$f(x)+x\,f'(x) = 4\,f(x)$$

Zu lösen ist also die Anfangswertaufgabe $\boxed{\begin{array}{l} x\,f'(x) = 3\,f(x), \\ f(2) = 16. \end{array}}$

Die Lösung der Differenzialgleichung kann durch Trennung der Veränderlichen erfolgen:

$$x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=3f, \quad \frac{\mathrm{d}f}{f}=3\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \ln f=3\ln x+\ln C, \quad f(x)=Cx^3$$

(Sonderfall $f=0$ und Beträge wie üblich).

Durch Einsetzen in die Anfangsbedingung $f(2)=16$ erhält man $8C=16$ und damit $C=2$, so dass $y=2x^3$ die gesuchte Kurve ist.