## Aufgabe 21.11

Zur Untersuchung der zeitlichen Entwicklung des Ausstattung von Haushalten mit Fernsehern soll der Einfachheit halber angenommen werden, dass der Ausstattungsgrad maximal 96 % erreichen kann, 1965 48 % betrug und damals jährlich um 4,8 % wuchs.

Das jährliche Wachstum der prozentualen Ausstattung $y$ wächst mit steigendem Ausstattungsgrad (je mehr Nachbarn einen Fernseher haben, desto schneller will man auch einen haben) und fällt mit zunehmender Sättigung. Deshalb soll angenommen werden, dass es proportional zu $y\,(96-y)$ ist. Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung von $y$ und skizzieren Sie diese!

## Lösung:

Für die Jahreszahl $t$ werde der Einfachheit halber die Substitution $x=t-1965$ eingeführt. Für die Funktion $y(x)$ liegen dann folgende Angaben vor:

$$y'(x)\sim y(x)\,(96-y(x)) \quad\Longleftrightarrow\quad y'(x)=a\,y(x)\,(96-y(x)),\qquad y(0)=48,\quad y'(0)=4{,}8.$$

Differenzialgleichung: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a\,y\,(96-y)$

Trennung der Veränderlichen: $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\,(96-y)}=a\,\mathrm{d}x,\qquad \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y\,(96-y)}=a\,x+C$

(Die beiden Lösungen der Differenzialgleichung $y\equiv 0$ und $y\equiv 96$ sind offensichtlich in der Anwendungssituation nicht sinnvoll. Weiterhin muss $0<y<96$ sein.)

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{1}{y\,(96-y)}=\dfrac{A}{y}+\dfrac{B}{96-y}=\dfrac{A(96-y)+By}{y\,(96-y)}$,

$$1=A(96-y)+By=(B-A)y+96A,\;\; B-A=0,\;\; 96A=1,\;\; A=B=\frac{1}{96}$$

$$a\,x+C=\frac{1}{96}\left(\int\frac{\mathrm{d}y}{y}+\int\frac{dy}{96-y}\right)=\frac{1}{96}\left(\int\frac{\mathrm{d}y}{y}-\int\frac{\mathrm{d}(96-y)}{96-y}\right)=\frac{1}{96}\,(\ln y-\ln(96-y))=\frac{1}{96}\ln\frac{y}{96-y}$$

(Betragsstriche müssen beim Logarithmus wegen $0<y<96$ nicht gesetzt werden.)

$$\frac{y}{96-y}=\mathrm{e}^{96C}\mathrm{e}^{96ax}=D\mathrm{e}^{96ax},\;\; D=\mathrm{e}^{96C}>0,\quad y=96D\,\mathrm{e}^{96ax}-y\,D\mathrm{e}^{96ax},\;\; (1+D\mathrm{e}^{96ax})y=96\,D\mathrm{e}^{96ax},$$

$$y=\frac{96\,D\,\mathrm{e}^{96ax}}{1+D\mathrm{e}^{96ax}}=\frac{96}{\frac{1}{D\mathrm{e}^{96ax}}+1}=\frac{96}{1+E\,\mathrm{e}^{-96ax}},\quad E=\frac{1}{D}>0\;\;\text{(allgemeine Lösung der Dgl.)}$$

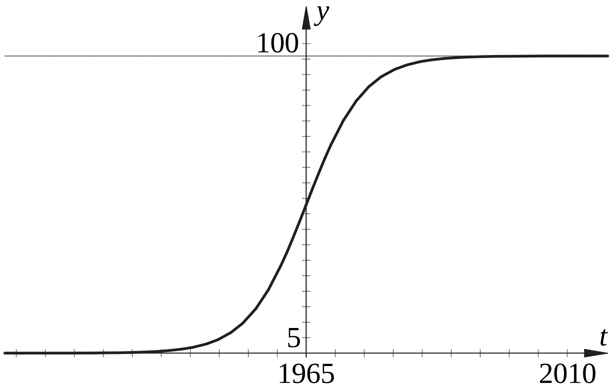
An sich ist bei Differenzialgleichungen 1. Ordnung nur eine Anfangsbedingung erfüllbar. Hier liegen zwei Anfangsbedingungen vor. Diese werden benötigt, da auch der Proportionalitätsfaktor $a$ noch unbekannt ist.

$$y(0)=\frac{96}{1+E}=48\quad\Longrightarrow\quad E=1$$

$$y'(x)=\frac{96^2\,E\,a\,\mathrm{e}^{-96ax}}{(1+E\mathrm{e}^{-96ax})^2},\;\; y'(0)=\frac{96^2\,E\,a}{(1+E)^2}=\frac{96^2\,a}{4}=24\cdot 96\,a=4{,}8\quad\Longrightarrow\quad 96\,a=0{,}2$$

Der prozentuale Ausstattungsgrad entwickelt sich also nach $y(x)=\dfrac{96}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2x}}=\dfrac{96}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2(t-1965)}}$.

Offensichtlich gilt $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y(x)=0$ und $\displaystyle\lim_{x\to\infty}y(x)=96$.




Die Entwicklung des Ausstattungsgrades wird also durch eine logistische Funktion beschrieben, vgl. Aufgabe 12.146. Die hier behandelte Funktion wird auch in Aufgabe 12.148 diskutiert. Logistische Funktionen beschreiben Sättigungsprozesse, bei denen eine Größe einen bestimmten Sättigungsgrad nicht überschreiten kann. Anwendungsbeispiele dafür sind auch die Entwicklung von Populationen in begrenzten Lebensräumen (s. z.B. Aufgabe 12.147) oder die Sättigung gewisser Substanzen in Lösungen.