Aufgabe 21.10

Ein Kapital, das am Jahresende 2004 einen Stand von 10 000 € hatte, entwickelt sich nach $\dot{K}(t) = 0{,}035\,K(t)$, wobei t die Zeit in Jahren sei. Ermitteln Sie die Funktion $K(t)$ sowie den effektiven Jahreszins!

Lösung:

Es handelt sich um eine homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Lösung der Differenzialgleichung ist $K(t) = C\mathrm{e}^{0{,}035\,t}$. Dies erhält man mittels Trennung der Veränderlichen (s. Aufgabe 21.9a)) oder mittels des Lösungsansatzes $K(t) = C\mathrm{e}^{\lambda t}$.

Ferner ist $K(2004) = C\mathrm{e}^{0{,}035\cdot 2004} = 10\,000\,€$, also $C = 10\,000\,€ \cdot \mathrm{e}^{-0{,}035\cdot 2004}$ und damit

$\underline{\underline{K(t) = 10\,000\,€ \cdot \mathrm{e}^{0{,}035\,(t-2004)}}}$.

Für die exponentielle Verzinsung gilt $K_t = K_0\,q^t = K_0\,(1+p)^t$ (Leibnizsche Zinseszinsformel).

Wegen $K(t) = C\mathrm{e}^{0{,}035t} = C\left(\mathrm{e}^{0{,}035}\right)^t$ ist $q = \mathrm{e}^{0{,}035} \approx 1{,}0356$, so dass der effektive Jahreszins $\mathrm{e}^{0{,}035} - 1 = 3{,}56\,\%$ beträgt.

(Bei der Aufgabe wurde eine kontinuierliche Verzinsung betrachtet, so dass der jährliche Zinssatz bei kontinuierlicher Verzinsung ermittelt wurde, vgl. Aufgaben 10.34 und 12.21.)