Aufgabe 21.9

Lösen Sie die Differenzialgleichungen des exponentiellen und logistischen Wachstums

a) $y'(x) = a\,y(x)$ und b) $y'(x) = a\,y(x)\,(b-y(x))$

durch Trennung der Veränderlichen!

Hinweis: $\dfrac{1}{x\,(c-x)} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{c-x}\right)$

Lösung:

a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = a\,\mathrm{d}x, \quad \displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \int a\,\mathrm{d}x, \quad \ln y = ax + \ln C, \quad \underline{\underline{y = C\mathrm{e}^{ax}}}$

(Sonderfall $C=0$ und Beträge wie üblich.)

Bei der Differenzialgleichung handelt es sich um eine homogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Deshalb bestimmt man die Lösung auch mit dem Lösungsansatz $y=C\mathrm{e}^{\lambda x}$, Einsetzen in die Differenzialgleichung führt auch $\lambda = a$, vgl. Aufgabe 21.35a).

b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a\,y\,(b-y), \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{y\,(b-y)} = a\,\mathrm{d}x, \quad \displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}y}{y\,(b-y)} = \int a\,\mathrm{d}x, \quad \dfrac{1}{b}\int\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{b-y}\right)\mathrm{d}y = \int a\,\mathrm{d}x,$

$\displaystyle\int\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{b-y}\right)\mathrm{d}y = \int ab\,\mathrm{d}x, \quad \ln y - \ln(b-y) = abx + \ln C, \quad \dfrac{y}{b-y} = C\mathrm{e}^{abx},$

$y = Cb\,\mathrm{e}^{abx} - yC\mathrm{e}^{abx}, \quad y\,(1+C\mathrm{e}^{abx}) = Cb\mathrm{e}^{abx}, \quad y = \dfrac{Cb\,\mathrm{e}^{abx}}{1+C\mathrm{e}^{abx}} = \dfrac{b}{\frac{1}{C\mathrm{e}^{abx}}+1} = \underline{\underline{\dfrac{b}{1+\widetilde{C}\mathrm{e}^{-abx}}}}$

Dabei ist $\widetilde{C} = 1/C$ eine wie C beliebige reelle Konstante. $\widetilde{C}=0$ ergibt sich allerdings auf diesem Wege nicht.

Die Division durch $y\,(b-y)$ ist in den Fällen $y=0$ und $y=b$ nicht zulässig. Offensichtlich sind sowohl $\underline{\underline{y(x)\equiv 0}}$ als auch $y(x)\equiv b$ Lösungen der Differenzialgleichung. Die Lösung $y(x)\equiv b$ entspricht in der allgemeinen Darstellung dem Fall $\widetilde{C}=0$, so dass beliebiges reelles $\widetilde{C}$ zugelassen ist. Der Fall $y=0$ ist in dieser Darstellung nicht enthalten, wäre aber in der mit C für $C=0$ enthalten.