**Aufgabe 20.80**

Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ über dem in der Richtung $ABCA$ durchlaufenen Dreieck mit den Eckpunkten $A(1,2,1)$, $B(3,10,-2)$ und $C(1,5,2)$

a) durch Integration längs des Randes,
b) mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes!

**Lösung:**

a) $\oint\limits_C \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = \oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$

Strecke $C_1$ von $(1,2,1)$ nach $(3,10,-2)$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$

$$\int\limits_{C_1} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 (y\dot{x} + z\dot{y} + x\dot{z})\,dt = \int_0^1 \big(2(2+8t) + 8(1-3t) - 3(1+2t)\big)\,dt = \int_0^1 (9-14t)\,dt$$

Strecke $C_2$ von $(3,10,-2)$ nach $(1,5,2)$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$

$$\int\limits_{C_2} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 (y\dot{x} + z\dot{y} + x\dot{z})\,dt = \int_0^1 \big(-2(10-5t) - 5(-2+4t) + 4(3-2t)\big)\,dt$$
$$= \int_0^1 (2-18t)\,dt$$

Strecke $C_3$ von $(1,5,2)$ nach $(1,2,1)$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$

$$\int\limits_{C_3} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 (y\dot{x} + z\dot{y} + x\dot{z})\,dt = \int_0^1 \big(0(5-3t) - 3(2-t) - 1(1+0t)\big)\,dt = \int_0^1 (-7+3t)\,dt$$

$$\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 (9-14t)\,dt + \int_0^1 (2-18t)\,dt + \int_0^1 (-7+3t)\,dt = \int_0^1 (4-29t)\,dt$$
$$= 4t - \frac{29t^2}{2}\Big|_0^1 = 4 - \frac{29}{2} = \underline{\underline{-\frac{21}{2}}}$$

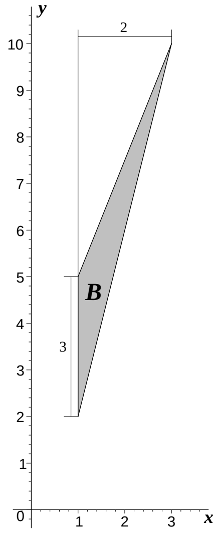
b) Sei $S$ die Dreiecksfläche und $B$ ihre Projektion in die $x$–$y$–Ebene, letztere ist die Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(1,2,0)$, $(3,10,0)$ und $(1,5,0)$.

Dann gilt nach dem Stokesschen Integralsatz $\oint\limits_C \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = \iint\limits_S \operatorname{rot} \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$.

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z & x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ebene durch $(1,2,1)$, $(3,10,-2)$, $(1,5,2)$:

$$\left(\begin{pmatrix}-2\\-5\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}17\\-2\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-1\end{pmatrix}=17x-2y+6z-19=0$$




$S$ wird also über $B$ durch $z=\dfrac{19-17x+2y}{6}$ definiert.

$$\oint_C y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=\iint_B(-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$$

$$=\iint_B(z_x+z_y-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_B\left(-\frac{17}{6}+\frac{2}{6}-1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{21}{6}\iint_B\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{21}{6}\,\frac{3\cdot 2}{2}=\underline{\underline{-\frac{21}{2}}}$$

(Der Flächeninhalt des Dreiecks könnte auch mit dem Kreuzprodukt als halbe Parallelogrammfläche berechnet werden:

$$F=\frac{1}{2}\left\|\left(\begin{pmatrix}3\\10\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)\times\left(\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right\|$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\left(\begin{pmatrix}2\\8\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right)\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\right\|=3.)$$