

Aufgabe 20.79

Sei C eine geschlossene Kurve. Zeigen Sie, dass das Integral $\oint_C yz dx + xz dy + xy dz$ gleich Null ist!

Lösung:

Sei S die von C umschlossene Fläche. Nach dem Stokesschen Integralsatz gilt

$$\oint_C yz dx + xz dy + xy dz = \oint_C \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = \iint_S \operatorname{rot} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot \vec{n} dS.$$

$$\text{Dabei ist } \operatorname{rot} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x-x \\ y-y \\ z-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Also gilt } \oint_C yz dx + xz dy + xy dz = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} dS = \underline{\underline{0}}.$$