Aufgabe 20.77

Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix}$ über dem Dreieck mit den Eckpunkten $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ und $(0,0,a)$ mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes!

Lösung:

Zirkulation des Vektorfeldes $\vec{u}(\vec{x})$ längs der geschlossenen Kurve C: $\oint\limits_C \vec{u}\cdot \mathrm{d}\vec{x}$

Stokesscher Integralsatz:

C Rand der Fläche S, $\oint\limits_C \vec{u}\cdot \mathrm{d}\vec{x} = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{u}\cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{pmatrix}$

Zirkulation des Vektorfeldes $\vec{u}$ längs geschlossener Kurve C = Fluss von $\operatorname{rot}\vec{u}$ durch S

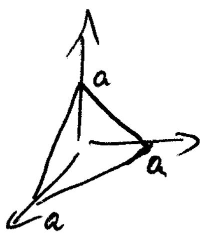
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot}\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z-y & x-z & y-x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{d.h.}\quad \oint\limits_C \vec{u}\cdot \mathrm{d}\vec{x} = \oint\limits_C \begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} = \oint\limits_C (z-y)\,\mathrm{d}x + (x-z)\,\mathrm{d}y + (y-x)\,\mathrm{d}z$$

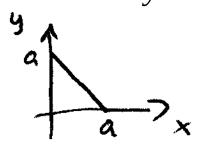
$$= \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{u}\cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{pmatrix} = \iint\limits_S \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{pmatrix} = \iint\limits_S 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Durch die 3 gegebenen Punkte geht die Ebene $x+y+z=a$.

$z = a - x - y$



Projektion in x–y–Ebene:



$0 \le x \le y,\ 0 \le y \le a-x$

$$\oint\limits_C \begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} = \iint\limits_S 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^a \int\limits_0^{a-x} (-2z_x - 2z_y + 2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= 6 \underbrace{\int\limits_0^a \int\limits_0^{a-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}_{\substack{\text{Dreiecks-}\\ \text{fläche } \frac{a^2}{2}}} = 6\int\limits_0^a (a-x)\,\mathrm{d}x = 6\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a = \underline{\underline{3a^2}}$$