Aufgabe 20.76

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Substitution $x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi$ das Integral $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ über der Oberseite des oberen Halbellipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$!

b) Wenden Sie auf das berechnete Integral den Gaußschen Integralsatz an und geben Sie mit Hilfe des Ergebnisses das Volumen des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ an!

Lösung:

a) Projektion des oberen Halbellipsoids S auf die x-y-Ebene ist die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

hierfür Substitution $\left.\begin{array}{l} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2r^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2\varphi}{b^2} = r^2$

$0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi$

Auf S: $z^2 = c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) = c^2(1-r^2)$,

$z = c\sqrt{1-r^2}$ wegen $z \ge 0$ (Nehmen an: $a,b,c>0$.).

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = abr$$

$$\iint\limits_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}\,abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = abc\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi abc\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$= -\pi abc\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}(1-r^2) = -\pi abc\left.\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}\pi abc}}$$

$\left(\text{Substitution } t=1-r^2,\ \mathrm{d}t=-2r\,\mathrm{d}r,\ -\frac{1}{2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\mathrm{d}(1-r^2)=r\,\mathrm{d}r \text{ ausgeführt.}\right)$

b) Sei B das obere Halbellipsoid (Körper), S (wie oben) die Oberseite seiner oberen Deckfläche und S_E^- die Unterseite seiner Grundfläche (Ellipse in der x–y–Ebene). Dann gilt nach dem Gaußschen Integralsatz

$$V_B = \iiint\limits_B \mathrm{d}b = \iiint\limits_B \operatorname{div}\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\mathrm{d}b = \iint\limits_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_E^-} \underset{\substack{\uparrow\\ z=0}}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\pi abc$$

(Man kann auch mit dem Bereichsintegral argumentieren: Da S_E die Projektion von S auf die x–y–Ebene ist, gilt $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{S_E} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ Volumen zwischen x–y–Ebene und S.)

Volumen des Ellipsoids: $\underline{\underline{\frac{4}{3}\pi abc}}$ $\left(\text{Spezialfall Kugel: } a=b=c, \text{ Volumen } \frac{4}{3}\pi a^3\right)$