Aufgabe 20.75

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} x^3+xz \\ y^3+yz \\ z^3+z^2 \end{pmatrix}$ durch die Kugel mit dem Radius 3 um den Koordinatenursprung!

Lösung:

Sei S die Außenseite der Oberfläche der Kugel mit Radius 3 um den Koordinatenursprung und K der Kugelkörper. Für den Fluss des Vektorfeldes $\vec{u} = \begin{pmatrix} x^3+xz \\ y^3+yz \\ z^3+z^2 \end{pmatrix}$ durch die Kugel gilt nach dem Gaußschen Integralsatz

$$\iint\limits_S u\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint\limits_K \operatorname{div}\vec{u}\ \mathrm{d}k = \iiint\limits_K \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}k$$
$$= \iiint\limits_K \left(3x^2+z+3y^2+z+3z^2+2z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_K \left(3(x^2+y^2+z^2)+4z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Kugelkoordinaten: $x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta \implies x^2+y^2+z^2 = r^2,$
$\mathrm{d}k = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

K wird beschrieben durch $0 \le r \le 3,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \pi,$ also gilt

$$\iiint\limits_K \left(3(x^2+y^2+z^2)+4z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{3} (3r^2+4r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{3} (3r^4+4r^3\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{3}{5}r^5+r^4\cos\theta\right)\sin\theta\right]_0^3\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{729}{5}+81\cos\theta\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{729}{5}+81\cos\theta\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1458\pi}{5}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + 162\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\sin\theta = \frac{1458\pi}{5}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} + 162\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$= \underline{\underline{\frac{2916\pi}{5} \approx 1832.18.}}$$

(Substitution $t = \sin\theta,\ \ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\sin\theta = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ ausgeführt.)