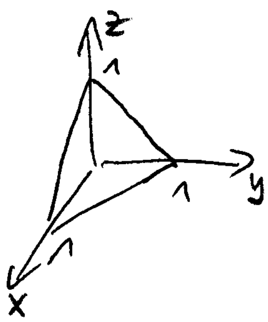
**Aufgabe 20.74**

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} x-2z \\ 3z-4x \\ 5x+\ \ y \end{pmatrix}$ durch die Oberfläche des Tetraeders mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ !

**Lösung:**

Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt

$$\iint\limits_S \begin{pmatrix} x-2z \\ 3z-4x \\ 5x+\ \ y \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} x-2z \\ 3z-4x \\ 5x+\ \ y \end{pmatrix} \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \mathrm{d}V = \text{Volumen.}$$




Tetraeder: Pyramide mit Grundfläche $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$ und Höhe 1

Volumen der Pyramide: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

**oder:**

Deckfläche $z = 1-x-y$

$$\text{Volumen} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[ y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_0^1 \left( 1-x-x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_0^1 \left( 1-x-x+x^2 - \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_0^1 \left( \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \bigg|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$