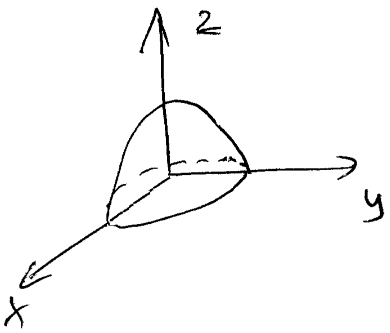
Aufgabe 20.72

Sei S die Oberfläche des Körpers, der von $x^2+y^2+z=1$ und der x-y-Ebene begrenzt wird. Berechnen Sie das Integral $\oiint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes!

Wieso stimmt das Ergebnis mit dem von Aufgabe 20.69 überein?

Lösung:



vgl. Aufgabe 20.69:

$z=1-x^2-y^2$, für $z=0:\ x^2+y^2=1$ (Einheitskreis)

$$\oiint\limits_S \begin{pmatrix} x\\ y\\ z^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{pmatrix}=\iiint\limits_B \operatorname{div}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z^2\end{pmatrix}\mathrm{d}b=\iiint\limits_B(2+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Übergang zu Zylinderkoordinaten:

$$\begin{array}{ll} x=r\cos\varphi & 0\le r\le 1\\ y=r\sin\varphi & 0\le\varphi<2\pi\\ z=z & 0\le z\le 1-x^2-y^2=1-r^2\end{array}\qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

$$\oiint\limits_S \begin{pmatrix} x\\ y\\ z^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{pmatrix}=\iiint\limits_B(2+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2}(2+2z)\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[2z+z^2\right]_0^{1-r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi\int_0^1(2-2r^2+1-2r^2+r^4)\,r\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1(3r-4r^3+r^5)\,\mathrm{d}r=2\pi\left(\frac{3}{2}r^2-r^4+\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=2\pi\left(\frac{3}{2}-1+\frac{1}{6}\right)=2\pi\,\frac{2}{3}=\underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}\quad\text{(wie bei Aufgabe 20.69)}$$

In Aufgabe 20.69 ist S nur der Teil des Paraboloids, d.h. die Grundfläche nicht dabei. Grundfläche ist der Einheitskreis in der x–y–Ebene, also kommt zum Ergebnis von Aufgabe 20.69 noch das Integral über die Unterseite des Einheitskreises hinzu. Dafür gilt aber

$$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\underbrace{\mathrm{d}z}_{=0}+y\,\underbrace{\mathrm{d}z}_{=0}\,\mathrm{d}x+\underbrace{z^2}_{=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\quad\text{da auf der } x\text{–}y\text{–Ebene } z=0 \text{ ist.}$$

Deshalb stimmen die Ergebnisse der beiden Aufgaben überein.