Aufgabe 20.71

Berechnen Sie das Integral $\oiint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ über der Außenseite der Kugel $x^2+y^2+z^2=a^2$ (vgl. Aufgabe 20.70) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes!

Lösung:

Gaußscher Integralsatz:

S Außenseite der Randfläche des Körpers B,

$$\iiint\limits_B \operatorname{div}\vec{u}\,\mathrm{d}b = \oiint\limits_S \left\langle \vec{u}, \begin{pmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{pmatrix}\right\rangle, \text{ d.h. } \iiint\limits_B \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}b = \oiint\limits_S \begin{pmatrix}u(x,y,z)\\ v(x,y,z)\\ w(x,y,z)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

$$\oiint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint\limits_B \operatorname{div}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\mathrm{d}b = 3\underbrace{\iiint\limits_B \mathrm{d}b}_{\text{Volumen}} = 3\,\frac{4}{3}\pi a^3 = \underline{\underline{4\pi a^3}}$$

Bemerkung:

Das Kugelvolumen lässt sich mit Hilfe der Transformation in Kugelkoordinaten leicht berechnen:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \qquad & 0 &\le r \le a\\ y &= r\sin\varphi\sin\theta & 0 &\le \varphi < 2\pi\\ z &= r\cos\varphi & 0 &\le \theta \le \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint\limits_B \mathrm{d}b &= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{a} r^2\,\mathrm{d}r = [-\cos\theta]_0^{\pi}\,2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$