Aufgabe 20.70

Gegeben sei die Kugel $x^2+y^2+z^2=a^2$. Als obere bzw. untere Halbkugel sollen die Teile der Kugel bezeichnet werden, für die $z\geq 0$ bzw. $z\leq 0$ gilt. Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

a) über der Oberseite der oberen Halbkugel,
b) über der Oberseite der unteren Halbkugel,
c) über der Unterseite der unteren Halbkugel,
d) über der Außenseite der Kugel!

Lösung:

a) $z(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, da $z\geq 0$
B: Projektion von S in die x–y–Ebene.
Für $z=0$ ergibt sich $x^2+y^2=a^2$: Kreis mit Radius a um den Koordinatenursprung.
$B=\{(r,\varphi):\ 0\leq r\leq a,\ 0\leq\varphi<2\pi\}$

$$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_B(-xz_x-yz_y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_B\left(-x\frac{-2x}{2\sqrt{a-x^2-y^2}}-y\frac{-2y}{2\sqrt{a-x^2-y^2}}+\sqrt{a-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_B\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{a-x^2-y^2}}+\sqrt{a-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a\left(\frac{r^2}{\sqrt{a-r^2}}+\sqrt{a-r^2}\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a\frac{r^2+a^2-r^2}{\sqrt{a-r^2}}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2\int\limits_0^a\frac{r\ \mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2}}=2\pi a^2\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}(a^2-r^2)}{\sqrt{a^2-r^2}}=-\pi a^2 2\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^a$$
$$=\underline{\underline{2\pi a^3}}\quad\text{(Substitution } t=a^2-r^2,\ \mathrm{d}t=-2r\,\mathrm{d}r,\ r\,\mathrm{d}r=-\tfrac{1}{2}\mathrm{d}t\text{ verwendet.)}$$

b) $z(x,y)=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, da $z\leq 0$
$$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_B\left(-x\frac{2x}{2\sqrt{a-x^2-y^2}}-y\frac{2y}{2\sqrt{a-x^2-y^2}}-\sqrt{a-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a\left(\frac{-r^2}{2\sqrt{a-r^2}}-\sqrt{a-r^2}\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\underline{\underline{-2\pi a^3}}$$
(über <u>Ober</u>seite der unteren Halbkugel (Das ist die nach oben zeigende Seite, nicht die Außenseite!))

c) Das Oberflächenintegral 2. Art ändert beim Übergang zur anderen Seite sein Vorzeichen, also $\iint\limits_{S_-} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\underline{\underline{2\pi a^3}}$.

d) Die Außenseite der Kugel setzt sich zusammen aus der Oberseite der oberen Halbkugel und der Unterseite der unteren Halbkugel. $\longrightarrow$ $\underline{\underline{4\pi a^3}}$