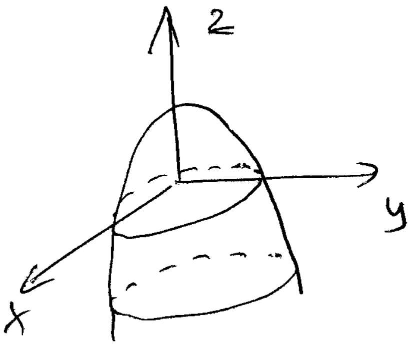
## Aufgabe 20.69

Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ über die Oberseite des Teils des Paraboloids $x^2+y^2+z=1$, für den $z\geq 0$ gilt!

## Lösung:




$z = 1-x^2-y^2$, für $z=0$: $x^2+y^2=1$ (Einheitskreis)

Also ist die Projektion $B$ von $S$ in die $x$–$y$–Ebene der Einheitskreis, $B=\{(r,\varphi):\, 0\leq r\leq 1,\, 0\leq\varphi<2\pi\}$.

$$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_B \left(-xz_x-yz_y+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_B \left(2x^2+2y^2+\left(1-x^2-y^2\right)^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \left(2r^2+\left(1-r^2\right)^2\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \left(2r^2+1-2r^2+r^4\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \left(r+r^5\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}+\frac{r^6}{6}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi=2\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$$

$$=\pi\left(1+\frac{1}{3}\right)=\underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}$$