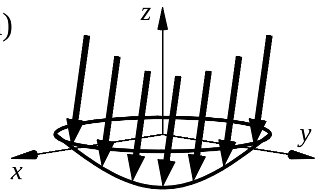
Aufgabe 20.68

Eine Flüssigkeit fließe mit einer Geschwindigkeit von $\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ durch die Fläche $z = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, $x^2+y^2 \le 1$, alle Koordinaten in m.

a) Veranschaulichen Sie die Situation zeichnerisch!
b) Wieviel Liter fließen pro Sekunde durch die Fläche?

Lösung:

a) 

b) Sei S die durchflossene Fläche und B ihre Projektion in die x–y–Ebene, das ist der Einheitskreis.

Durchfluss: $$\iint\limits_S \left\langle \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{pmatrix} \right\rangle \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$
$$= \iint\limits_B \left[-0.2\,z_x - 0\,z_y - 1)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ B = \{(r,\varphi) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi\},\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

$$z_x = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\frac{r\cos\varphi}{r}\sin\frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{4}\cos\varphi\sin\frac{\pi}{2}r$$

$$\iint\limits_B \left[-0.2\,z_x - 0\,z_y - 1)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_B \left[-0.2\frac{\pi}{4}\cos\varphi\sin\frac{\pi}{2}r - 1\right] r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \left[-0.2\frac{\pi}{4}\cos\varphi\sin\frac{\pi}{2}r - 1\right] \mathrm{d}\varphi\, r\,\mathrm{d}r = \int_0^1 \left[-0.2\frac{\pi}{4}\sin\varphi\sin\frac{\pi}{2}r - \varphi\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r$$
$$= -2\pi\int_0^1 r\,\mathrm{d}r = -2\pi\frac{r^2}{2}\bigg|_0^1 = -\pi$$

Also fließen $-\pi\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ „von unten nach oben“, d.h. ca. 3142 Liter pro Sekunde „von oben nach unten“ durch die Fläche.