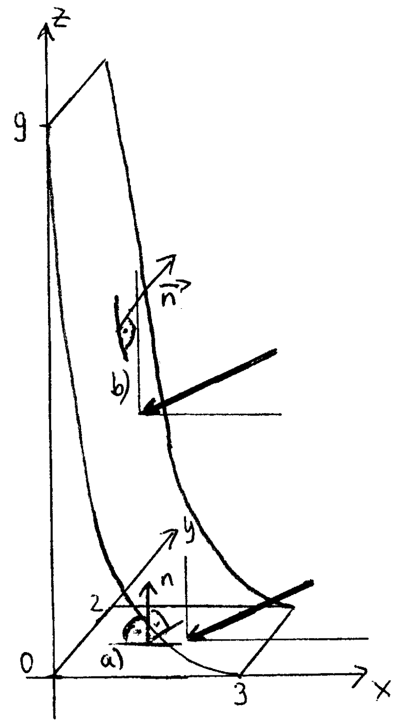
Aufgabe 20.67

Eine Flüssigkeit fließe mit einer Geschwindigkeit von $-2.5\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{s}}$

a) durch die Fläche S_1: $z=\varphi(x,y)=0,\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2$ (jeweils in dm),

b) durch die Fläche S_2: $z=\varphi(x,y)=(x-3)^2,\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2$ (jeweils in dm).

Berechnen Sie mit Hilfe des Oberflächenintegrals 2. Art, welche Flüssigkeitsmenge pro Sekunde durch die Fläche S_i $(i=1,2)$ strömt!



Lösung:

Fluss durch S: Geschwindigkeit · durchflossene Fläche
$\vec{n}$: Normaleneinheitsvektor auf S

$$Q=\iint\limits_S\langle\vec{v},\vec{n}\rangle\,\mathrm{d}s=\iint\limits_S\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=\iint\limits_S\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

$$=\iint\limits_S v_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+v_2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+v_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_B(-v_1z_x-v_2z_y+v_3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$B=\{(x,y):\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2\}$
(S: Fläche $z=z(x,y)=\varphi(x,y)$,
B: Projektion von S in x–y–Ebene)

a) $z=\varphi(x,y)\equiv 0$

$$Q=-2.5\iint\limits_B(-\sqrt{3}\cdot 0+0\cdot 0+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2.5\int_0^2\int_0^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2.5\cdot 2\cdot 3=-15$$

($\iint\limits_B\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ist Flächeninhalt des Rechtecks: 6)

Fluss $-15\,\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}}=-15\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$, d.h. 15 Liter pro Sekunde von Oberseite Richtung Unterseite der Fläche

Da es sich um eine Strömung mit konstanter Geschwindigkeit handelt, kann der Fluss durch ein Parallelogramm (hier speziell: Rechteck) auch mit Hilfe des Spatproduktes berechnet werden. Dies wird für die hier behandelte Situation in Aufgabe 7.125 getan.

b) $z=\varphi(x,y)=(x-3)^2$

$$Q=-2.5\iint\limits_B(-\sqrt{3}\cdot 2(x-3)+0\cdot 0+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2.5\int_0^2\int_0^3(6\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-2.5\int_0^2\Big[(6\sqrt{3}+1)x-\sqrt{3}x^2\Big]_0^3\mathrm{d}y=-2.5\int_0^2(18\sqrt{3}+3-9\sqrt{3})\,\mathrm{d}y=-2.5\,(9\sqrt{3}+3)\,2$$

$$=-45\sqrt{3}-15\approx-92.94$$

Fluss $-92.94\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$, d.h. 92.94 Liter pro Sekunde von Oberseite Richtung Unterseite der Fläche