Aufgabe 20.66

Betrachtet wird der von der Fläche $z=2-\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$ und von der x-y-Ebene begrenzte Körper.

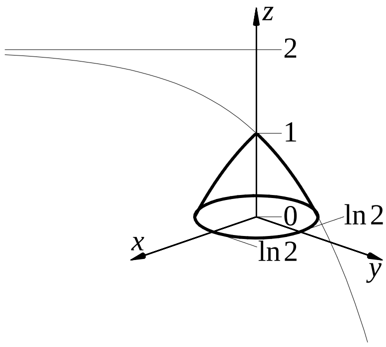
a) Skizzieren Sie den Körper!

b) Berechnen Sie sein Volumen!

c) Bei dem Körper handele es sich um einen Hohlkörper, dessen Außenhaut aus Material der Dichte $\rho(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+y^2}}}}, & z>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}, & z=0 \end{cases}$ besteht. Berechnen Sie seine Masse!

Lösung:

a) $z=2-\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ gilt für $\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}=2 \iff \sqrt{x^2+y^2}=\ln 2$, also auf einem Kreis mit Radius $\ln 2$ um den Koordinatenursprung in der x-y-Ebene.



b) Da die Grundfläche in der x-y-Ebene ein Kreis um den Koordinatenursprung ist und die Höhe (und auch die Dichte bei c)) nur vom Abstand von der z-Achse abhängt, ist die Verwendung von Polarkoordinaten sinnvoll: $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$V=\iint\limits_B z(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_B \left(2-\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_0^{\ln 2}(2-\mathrm{e}^r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=2\pi\int_0^{\ln 2}(2r-r\mathrm{e}^r)\,\mathrm{d}r$$

$$\int r\mathrm{e}^r\,\mathrm{d}r=r\mathrm{e}^r-\int \mathrm{e}^r\,\mathrm{d}r=\mathrm{e}^r(r-1)+C$$

$$V=2\pi\left(r^2-\mathrm{e}^r(r-1)\right)\Big|_0^{\ln 2}=2\pi\Big((\ln 2)^2-2(\ln 2-1)-1\Big)=2\pi\Big((\ln 2)^2-2\ln 2+1\Big)$$
$$=2\pi(\ln 2-1)^2\approx 0.59$$

c) Grundfläche ist eine Kreisfläche mit Radius $\ln 2$ und konstanter Dichte $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, ihre Masse also $\dfrac{\pi(\ln 2)^2}{\sqrt{5}}$.

Die Masse der Deckfläche ist $m_S=\iint\limits_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\iint\limits_B \rho(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

$$1+z_x^2+z_y^2=1+\left(-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2=1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$m_S=\iint\limits_B \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+y^2}}}}\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+y^2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi(\ln 2)^2$$

Die Masse des Hohlkörpers beträgt also $\pi(\ln 2)^2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx 2.18$.