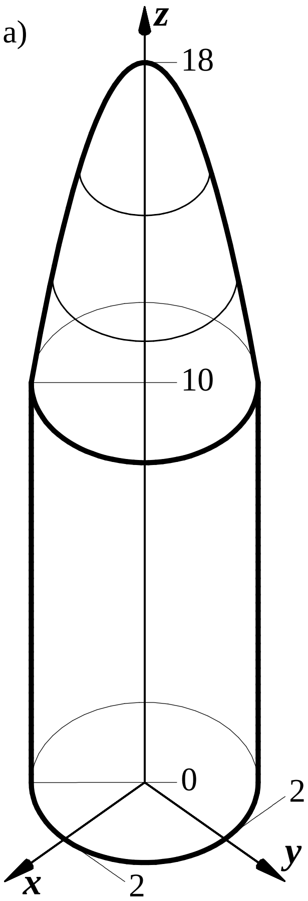
Aufgabe 20.64

Betrachtet wird der von den Flächen $z=0$ $(x^2+y^2\le 4)$, $z=18-2x^2-2y^2$ und $x^2+y^2=4$ begrenzte Körper.

a) Skizzieren Sie den Körper!
b) Berechnen Sie sein Volumen!
c) Berechnen Sie seine Oberfläche!
d) Der Körper bestehe aus Material der Dichte $\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{3+\sqrt{x^2+y^2}}$. Berechnen Sie seine Masse!

Lösung:

a)



b) In Zylinderkoordinaten wird der Körper beschrieben durch

$K=\{(r,\varphi,z): 0\le z\le 18-2r^2,\ 0\le r\le 2,\ 0\le\varphi<2\pi\}$.

$$V=\iiint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_K r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{18-2r^2}\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\Big[z\Big]_0^{18-2r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(18-2r^2)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(18r-2r^3)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\left[9r^2-\frac{r^4}{2}\right]_0^2\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}(36-8)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=28\cdot 2\pi=\underline{\underline{56\pi}}$$

c) Deckfläche S: $z=18-2x^2-2y^2$, $z_x=-4x$, $z_y=-4y$,
Projektion B in x–y–Ebene: Kreis mit Radius 2 um Ursprung

$$\iint_S \mathrm{d}s=\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_B\sqrt{1+16x^2+16y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\sqrt{1+16r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=2\pi\int_0^{2}\sqrt{1+16r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{32}\sqrt{1+16r^2}\,\mathrm{d}(1+16r^2)=\frac{2\pi}{32}\cdot\frac{2}{3}(1+16r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$

$$=\frac{\pi}{24}\left(65^{\frac{3}{2}}-1\right)\approx 68.467$$

Mantelfl.: $2\pi\cdot 2\cdot 10$; Grundfl. $\pi\cdot 2^2$; Oberfl.: $\dfrac{\pi}{24}\left(65^{\frac{3}{2}}-1\right)+44\pi=\underline{\underline{\left(44+\dfrac{\left(65^{\frac{3}{2}}-1\right)}{24}\right)\pi\approx 206.7}}$

d) $m=\iiint\limits_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_K \frac{1}{2}\,\frac{1}{3+r}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\int\limits_0^{18-2r^2}\mathrm{d}z\,\frac{1}{2}\,\frac{r}{3+r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\Big[z\Big]_0^{18-2r^2}\frac{1}{2}\,\frac{r}{3+r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\frac{(18-2r^2)\,r}{2\,(3+r)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}\frac{(9-r^2)\,r}{3+r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}(3-r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2}(3r-r^2)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{3r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^2\mathrm{d}\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(6-\frac{8}{3}\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{10}{3}\cdot 2\pi=\underline{\underline{\frac{20\pi}{3}}}$$