

Aufgabe 20.63

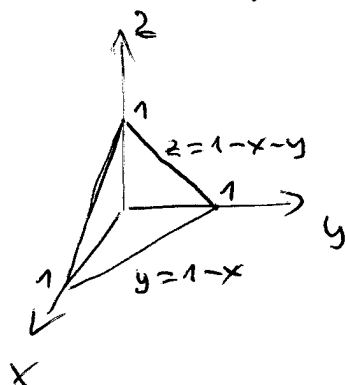
Sei F der im I. Oktanten gelegene Teil der Ebene $x+y+z=1$ und S die Oberseite von F .

a) F sei mit Masse der Dichte $\frac{1}{(1+x+z)^2}$ belegt. Berechnen Sie die Masse der Fläche!

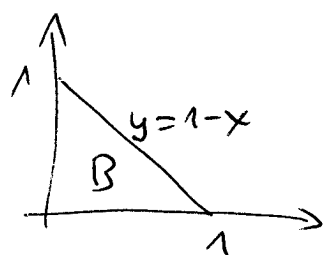
b) Berechnen Sie das Oberflächenintegral 2. Art $\iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$!

Lösung:

Fläche $x+y+z=1$:
 $z=1-x-y$



Projektion in x - y -Ebene:



$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x$$

a) Masse = Dichte \times Fläche: $m = \iint_S \rho(x,y,z) \, ds$ (Oberflächenintegral 1. Art)

$$\begin{aligned} m &= \iint_S \frac{ds}{(1+x+z)^2} = \iint_B \frac{\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2} \, db}{(1+x+1-x-y)^2} = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{dy \, dx}{(2-y)^2} \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \left[\frac{1}{2-y} \right]_0^{1-x} dx = \sqrt{3} \left(\ln(1+x) - \frac{1}{2}x \right) \Big|_0^1 = \sqrt{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \approx 0.335 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy &= \iint_B (-xz_x - yz_y + z) \, db = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y+1-x-y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} dy \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad (\text{Dreiecksfläche, Grundseite und Höhe je 1}) \end{aligned}$$