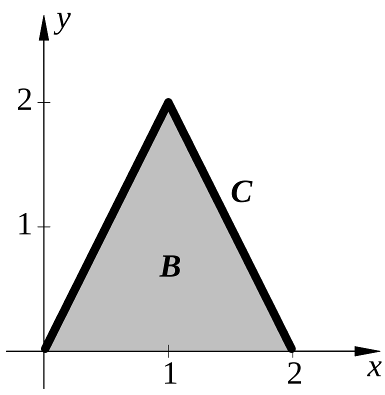
Aufgabe 20.61

Über dem Intervall $[0,2]=\{x\in\mathbb{R}:\ 0\le x\le 2\}$ sei die in der Abbildung fett dargestellte Funktion $f(x)$ definiert, die von ihr und der x–Achse begrenzte Fläche werde mit B bezeichnet.

Über B sei durch $S=\{(x,y,z):\ z=\varphi(x,y)=2-x+y,\ (x,y)\in B\}$ die Fläche S beschrieben. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche S mit Hilfe eines Oberflächenintegrals!



Lösung:

$$F=\iint\limits_S \mathrm{d}S=\iint\limits_B \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\iint\limits_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\cdot\text{Fläche von } B=\sqrt{3}\,\frac{2\cdot 2}{2}$$
$$=\underline{\underline{2\sqrt{3}\approx 3.46}}$$

Durch die Aufgabenstellung nicht zugelassener Lösungsweg:

S ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0,2)$, $(2,0,0)$ und $(1,2,3)$. Die Fläche beträgt

$$F=\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&-2\\1&2&1\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix}\right\|=\underline{\underline{2\sqrt{3}}}.$$