**Aufgabe 20.59**

Berechnen Sie die Integrale

a) $\iint\limits_S \sqrt{1+2z}\,\mathrm{d}S$ und

b) $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (4x+3y+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

über der Fläche $S = \{(x,y,z):\ z = \frac{x^2+y^2}{2},\ -x \le y \le x,\ 0 \le x \le 1\}$ !

**Lösung:**

a) $$\iint\limits_S \sqrt{1+2z}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_B \sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1\int\limits_{-x}^{x} \sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_0^1\int\limits_{-x}^{x}(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[y+yx^2+\frac{y^3}{3}\right]_{-x}^{x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1\left(x+x^3+\frac{x^3}{3}-(-x-x^3-\frac{x^3}{3})\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_0^1\left(2x+\frac{8}{3}x^3\right)\mathrm{d}x = x^2+\frac{2}{3}x^4\Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

b) $$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (4x+3y+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_B (-xz_x - yz_y + (4x+3y+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_0^1\int\limits_{-x}^{x}(-x^2-y^2+4x+3y+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1\int\limits_{-x}^{x}(4x+3y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1\left[4xy+3\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{x}\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_0^1\left(4x^2+3\frac{x^2}{2}-(-4x^2+3\frac{x^2}{2})\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 8x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}x^3\Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$