Aufgabe 20.58

Berechnen Sie die Integrale

a) $\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+1}\,\mathrm{d}s$ und

b) $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

über der Fläche $S = \{(x,y,z):\; z = xy,\, 0 \le y \le x,\, 0 \le x \le 1\}$!

Lösung:

Oberflächenintegrale analog Kurvenintegralen

Oberflächenintegral 1. Art (über Fläche): wie $\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b$ Integral über einer Fläche,
aber nicht mehr über einer ebenen Fläche,
sondern über einer (i.A.) gekrümmten Fläche S im Raum

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \lim_{\Delta s\to 0}\sum f(x,y,z)\,|\Delta s|$$

($\sum$ Funktionswert mal Flächeninhalt eines kleinen Oberflächenstücks)

Oberflächeninhalt: $A = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\sum|\Delta s| = \iint\limits_S \mathrm{d}s$,

Masse der Oberfläche: $m = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\sum\rho(x,y,z)\,|\Delta s| = \iint\limits_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

Für Fläche S beschrieben durch $z = \varphi(x,y)$, B: Projektion der Fläche S in die x–y–Ebene:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \iint\limits_B f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+(\varphi_x(x,y))^2+(\varphi_y(x,y))^2}\,\mathrm{d}b$$
$$= \iint\limits_B f(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}b$$

Oberflächenintegral 2. Art (über Projektion auf Koordinatenebenen)

$$\iint\limits_S \begin{pmatrix} P(x,y,z)\\ Q(x,y,z)\\ R(x,y,z)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{pmatrix} = \iint\limits_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(z.B. Durchfluss (skalare Größe) = Geschwindigkeit · durchflossene Fläche,
Skalarprodukt „über kleine Flächenstückchen aufaddiert“ $\longrightarrow$ Integral)

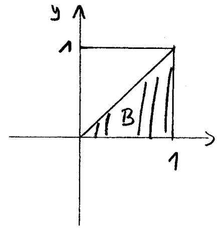
Für Fläche S beschrieben durch $z = \varphi(x,y)$, B: Projektion der Fläche S in die x–y–Ebene:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint\limits_B \big[-P(x,y,\varphi(x,y))\,\varphi_x(x,y) - Q(x,y,\varphi(x,y))\,\varphi_y(x,y) + R(x,y,\varphi(x,y))\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint\limits_B \big[-P(x,y,z)z_x - Q(x,y,z)z_y + R(x,y,z)\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Merkstoff zu Oberflächenintegralen

a) Oberflächenintegral 1. Art

Grundfläche $B = \{(x,y) : 0 \le y \le x,\ 0 \le x \le 1\}$



$$\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+1}\,\mathrm{d}s = \iint\limits_B z\sqrt{x^2+y^2+1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$\iint\limits_B xy\sqrt{x^2+y^2+1}\sqrt{1+y^2+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^x xy(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1\int_0^x (xy+x^3y+xy^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}+x^3\frac{y^2}{2}+x\frac{y^4}{4}\right]_0^x \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2}+\frac{x^5}{4}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2}+\frac{3}{4}x^5\right)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{8}+\frac{3}{24}x^6\Big|_0^1 = \frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

b) Oberflächenintegral 2. Art

$$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_B (-xz_x - xyz_y + xy^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$\iint\limits_B (-xy - x^2y + xy^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^x (-xy - x^2y + xy^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \left[-x\frac{y^2}{2} - x^2\frac{y^2}{2} + x\frac{y^3}{3}\right]_0^x \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{3}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6}\right)\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{30}\Big|_0^1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{30} = -\frac{15+4}{120} = \underline{\underline{-\frac{19}{120}}}$$