Aufgabe 20.57

Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 im Kraftfeld $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy+2xz^2+3x^2 \\ x^2+z^2+2y \\ 2yz+2x^2z+1 \end{pmatrix}$ von $(0,0,0)$ nach $(1,2,3)$ zu bewegen!

Lösung:

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

Da kein Weg gegeben ist, ist die Aufgabe so nur zu beantworten, wenn das Integral (die Arbeit) unabhängig vom Weg ist, es sich also um ein konservatives Kraftfeld handelt. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Feld wirbelfrei, d.h. $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$ ist. Für das gegebene Feld wird das in Aufgabe 19.15c gezeigt.

Somit ist das Potenzial zu bestimmen. Dies erfolgt durch sukzessive Integration nach dx (d.h. $U(x,y,z)=\int \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+C(y,z)$), d$y$ und dz, s. Aufgabe 19.13:

$$\vec{F} = \nabla U = \begin{pmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \\ \partial U/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy+2xz^2+3x^2 \\ x^2+z^2+2y \\ 2yz+2x^2z+1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2xy+2xz^2+3x^2,\ \ U(x,y,z)=\int(2xy+2xz^2+3x^2)\,\mathrm{d}x+C(y,z)=x^2y+x^2z^2+x^3+C(y,z)$$

$$\longrightarrow\quad \frac{\partial U}{\partial y}=x^2+\frac{\partial C}{\partial y}=x^2+z^2+2y$$

$$\longrightarrow\quad \frac{\partial C}{\partial y}=z^2+2y,\ \ C(y,z)=\int(z^2+2y)\,\mathrm{d}y+D(z)=z^2y+y^2+D(z)$$

$$U(x,y,z)=x^2y+x^2z^2+x^3+z^2y+y^2+D(z)\quad\longrightarrow\quad \frac{\partial U}{\partial z}=2x^2z+2yz+D'(z)=2yz+2x^2z+1$$

$$\longrightarrow\quad D'(z)=1,\ \ D(z)=z+E,\ \ U(x,y,z)=x^2y+x^2z^2+x^3+z^2y+y^2+z+E$$

$$W=U(1,2,3)-U(0,0,0)=2+9+1+18+4+3+E-E=\underline{\underline{37}}$$

Da die Wegunabhängigkeit bekannt ist, kann die Arbeit auch durch Integration längs eines beliebigen die beiden Punkte verbindenden Weges ermittelt werden, am einfachsten erfolgt die Integration längs der Gerade $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}$, $0\le t\le 1$:

$$W = \int_C (2xy+2xz^2+3x^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+z^2+2y)\,\mathrm{d}y+(2yz+2x^2z+1)\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \Big((4t^2+18t^3+3t^2)\,\mathrm{d}t+(t^2+9t^2+4t)\,2\,\mathrm{d}t+(12t^2+6t^3+1)\,3\,\mathrm{d}t\Big)$$

$$= \int_0^1 (3+8t+63t^2+36t^3)\,\mathrm{d}t = 3+4t^2+21t^3+9t^4\Big|_0^1 = \underline{\underline{37}}.$$