Aufgabe 20.56

Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 in einem Kraftfeld

a) $\vec{F}_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2+y \\ 2-x \end{pmatrix}$, b) $\vec{F}_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2+y \\ 2+x \end{pmatrix}$

längs der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Ellipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ vom Punkt $(0,-2)$ zum Punkt $(0,2)$ zu bewegen! Führen Sie die Berechnung, wenn es möglich ist, sowohl über das Potenzial als auch mit einem Kurvenintegral aus! Liegt Wegunabhängigkeit vor?

Hinweis: Für die Integration empfiehlt sich die Verwendung einer Parameterdarstellung der Ellipse und der Formel $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$.

Lösung:

Parameterdarstellung der Ellipse mit den Halbachsen 1 und 2 ist $\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix}$, der Punkt $(0,-2)$ ergibt sich bei $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, der Punkt $(0,2)$ bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$, mit wachsendem φ wird die Kurve dabei entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

a) $$W = \int\limits_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{x} = \int\limits_C (2+y)\,dx + (2-x)\,dy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+2\sin\varphi)(-\sin\varphi)\,d\varphi + (2-\cos\varphi)2\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (-2\sin\varphi - 2\sin^2\varphi + 4\cos\varphi - 2\cos^2\varphi)\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\cos\varphi - 2\sin\varphi - 2)\,d\varphi$$

$$= 4\sin\varphi + 2\cos\varphi - 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = (4-\pi) - (-4+\pi) = \underline{\underline{8-2\pi}}$$

b) $$W = \int\limits_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{x} = \int\limits_C (2+y)\,dx + (2+x)\,dy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+2\sin\varphi)(-\sin\varphi)\,d\varphi + (2+\cos\varphi)2\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (-2\sin\varphi - 2\sin^2\varphi + 4\cos\varphi + 2\cos^2\varphi)\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\cos\varphi - 2\sin\varphi + 2\cos 2\varphi)\,d\varphi$$

Hier ist die Formel aus dem Hinweis verwendet.

$$= 4\sin\varphi + 2\cos\varphi + \sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4 - (-4) = \underline{\underline{8}}$$

Das Kurvenintegral 2. Art $\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$ ist genau dann wegunabhängig, wenn $\vec{F}$ ein Potenzialfeld, d.h. konservativ ist. Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ gilt.

Im Falle a) gilt $\operatorname{rot}\vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2+y & 2-x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, das Feld ist nicht konservativ, das Integral i.A. wegabhängig. Eine Berechnung der Arbeit über ein Potenzial ist nicht möglich.

Im Falle b) gilt $\operatorname{rot}\vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2+y & 2+x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \vec{0}$, also wegunabhängig, konservatives Kraftfeld. In dem Feld gilt der Energieerhaltungssatz. Potenzial des Feldes ist die potenzielle Energie $U(x,y)$: $\nabla U = \vec{F}_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2+y \\ 2+x \end{pmatrix}$.

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = 2+y,\;\; U(x,y) = \int (2+y)\,\mathrm{d}x = 2x + xy + D(y),$

$\dfrac{\partial U}{\partial y} = x + D'(y) = 2 + x \;\longrightarrow\; D'(y) = 2,\; D(y) = 2y + E$

Potenzielle Energie: $U(x,y) = xy + 2x + 2y + E,$

Arbeit unabhängig vom Weg: $W = U(0,2) - U(0,-2) = 4 - (-4) = \underline{\underline{8}}$