Aufgabe 20.54

Die Kurve C verbinde die Punkte $(0,0)$ und $(0,2)$. Sie verlaufe vom Koordinatenursprung zunächst längs der x–Achse bis zum Punkt $(2,0)$ und dann längs des Kreises mit Radius 2 um den Koordinatenursprung zum Punkt $(0,2)$.

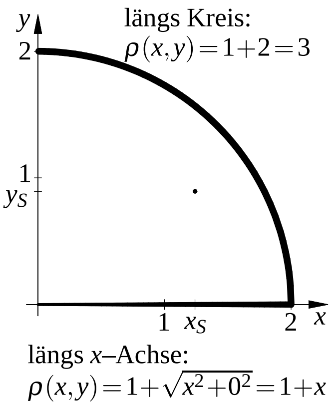
a) Die Kurve sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y)=1+\sqrt{x^2+y^2}$ belegt. Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt!

b) Welche Arbeit ist erforderlich, um einen Punkt der Masse 1 in dem Kraftfeld $\vec{F}_1(x,y)=\begin{pmatrix} 2xy \\ y^2+2 \end{pmatrix}$ auf C von $(0,0)$ nach $(0,2)$ zu bewegen? Argumentieren Sie, wenn das möglich ist, sowohl mit dem Kurvenintegral als auch mit dem Potenzial des Kraftfeldes!

c) Beantworten Sie die bei b) gestellte Frage für das Feld $\vec{F}_2(x,y)=\begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+2 \end{pmatrix}$!

Lösung:

a)



Parameterdarstellung des Viertelkreises:

$$x=2\cos\varphi,\ y=2\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{d}l=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}\varphi=2\,\mathrm{d}\varphi$$

$$m=\int\limits_C \rho(x,y)\,\mathrm{d}l=\int\limits_0^2(1+x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\pi/2}3\cdot 2\,\mathrm{d}\varphi=\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_0^2+\Big[6\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4+3\pi\approx 13.42$$

$$M_{y,1}=\int\limits_C x\rho(x,y)\,\mathrm{d}l=\int\limits_0^2(x+x^2)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\pi/2}2\cos\varphi\cdot 3\cdot 2\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\Big[12\sin\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2+\frac{8}{3}+12=\frac{50}{3}$$

$$M_{x,1}=\int\limits_C y\rho(x,y)\,\mathrm{d}l=\int\limits_0^2 0\,(1+x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\pi/2}2\sin\varphi\cdot 3\cdot 2\,\mathrm{d}\varphi=\Big[-12\cos\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=12$$

Also ist der Schwerpunkt $(x_S,y_S)=\left(\dfrac{50/3}{4+3\pi},\dfrac{12}{4+3\pi}\right)\approx(1.24,0.89)$.

b) Längs des Geradenstücks auf der x–Achse gilt $y=0$ und $\mathrm{d}y=0$. Längs des Viertelkreises gilt mit obiger Parameterdarstellung $\mathrm{d}x=-2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ und $\mathrm{d}y=2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

$$W=\int\limits_C \vec{F}_1(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}=\int\limits_C 2xy\,\mathrm{d}x+(y^2+2)\,\mathrm{d}y=$$

$$=\int\limits_0^2(0\,\mathrm{d}x+0\cdot 0)+\int\limits_0^{\pi/2}(-2\cdot 2\cos\varphi\,2\sin\varphi\,2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi+(4\sin^2\varphi+2)\,2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi)$$

$$=4\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi-8\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=4\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi-8\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\sin\varphi$$

$$=\Big[4\sin\varphi\Big]_0^{\pi/2}-\left[\frac{8}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\pi/2}=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

Ein Potenzial existiert genau dann, wenn $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ gilt. Für das betrachtete Feld gilt aber $\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x \neq \dfrac{\partial(y^2+2)}{\partial x} = 0$. Also ist das Feld nicht konservativ und die Arbeit kann nicht als Potenzialdifferenz ermittelt werden.

c) $$W = \int_C \vec{F}_2(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_C 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2+2)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^2 (0\,\mathrm{d}x + 0 \cdot 0) + \int_0^{\pi/2} (-2 \cdot 2\cos\varphi\, 2\sin\varphi\, 2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + (4\cos^2\varphi + 2)\, 2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi)$$
$$= -16 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\, \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + 4 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + 8 \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= -16 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\, \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + 4 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + 8 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi)\, \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= 12 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi - 24 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\, \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 12 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi - 24 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\sin\varphi$$
$$= \Big[12\sin\varphi\Big]_0^{\pi/2} - \Big[8\sin^3\varphi\Big]_0^{\pi/2} = 12 - 8 = 4$$

Hier gilt nun $\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial(x^2+2)}{\partial x}$, das Feld ist also konservativ.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy,\ \ U(x,y) = \int 2xy\,\mathrm{d}x + C(y) = x^2y + C(y),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + C'(y) = x^2 + 2,\ \ C'(y) = 2,\ \ C(y) = 2y + D,\quad \text{Potenzial: } U(x,y) = x^2y + 2y + D$$

Die Arbeit erhält man als Potenzialdifferenz $W = U(0,2) - U(0,0) = 4 + D - D = 4$.