Aufgabe 20.52

a) Zeigen Sie, dass $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$ ein Potenzialfeld ist!

b) Berechnen Sie das Potenzial des Feldes!

c) Das gegebene Feld $\vec{F}(x,y,z)$ sei ein Kraftfeld. Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, einen Punkt der Masse 1 in diesem Feld von $(0,0,0)$ nach $(1,2,3)$ zu bewegen!

Lösung:

a) Ein Vektorfeld ist Potenzialfeld genau dann, wenn es wirbelfrei ist. Es gilt

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y-z & x-y+z & -x+y+z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ (-1)-(-1) \\ 1-1 \end{pmatrix} = \vec{0},$$

also ist das Feld wirbelfrei und damit ein Potenzialfeld.

b) $$\frac{\partial U}{\partial x} = x+y-z,\ \ U(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + yx - zx + C(y,z),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = x-y+z,\ \ \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = -y+z,\ \ C(y,z) = -\frac{y^2}{2} + zy + D(z),$$

$$U(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + yx - zx + zy + D(z),\ \ \frac{\partial U}{\partial z} = -x+y+D'(z) = -x+y+z,$$

$$D'(z) = z,\ \ D(z) = \frac{z^2}{2} + E,$$

$$U(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + yx - zx + zy + E$$

c) $$W = \int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_C \nabla U \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_C \mathrm{d}U = U(1,2,3) - U(0,0,0) = 8 - 0 = \underline{\underline{8}}$$