Aufgabe 20.51

Seien C_1 bzw. C_2 die in der oberen Halbebene gelegene Bogenstücke des Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ um den Koordinatenursprung von $(-1,1)$ nach $(1,1)$ bzw. von $(1,1)$ nach $(-1,1)$.

a) Berechnen Sie $\int\limits_{C_1} y\,\mathrm{d}l$ und $\int\limits_{C_2} y\,\mathrm{d}l$!

b) Berechnen Sie $\int\limits_{C_1} \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ und $\int\limits_{C_2} \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$!

c) Welche Arbeit ist erforderlich, um einen Punkt der Masse 1 in dem Kraftfeld $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ auf C_1 von $(-1,1)$ nach $(1,1)$ bzw. auf C_2 von $(1,1)$ nach $(-1,1)$ zu bewegen? Argumentieren Sie, wenn das möglich ist, sowohl mit dem Kurvenintegral aus auch mit dem Potenzial des Kraftfeldes!

d) Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt des mit Masse der Dichte $\rho(x,y) = y$ belegten Bogenstücks C_1 bzw. C_2 !

Lösung:

Parameterdarstellung des Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ um den Koordinatenursprung:
$x(t) = \sqrt{2}\cos t,\ y(t) = \sqrt{2}\sin t$, Punkt $(-1,1)$: $t = \frac{3\pi}{4}$, Punkt $(1,1)$: $t = \frac{\pi}{4}$

a) Bogendifferenzial: $\mathrm{d}l = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,|\mathrm{d}t| = \sqrt{(-\sqrt{2}\sin t)^2 + (\sqrt{2}\cos t)^2}\,|\mathrm{d}t| = \sqrt{2}|\mathrm{d}t|$

$$\int\limits_{C_1} y\,\mathrm{d}l = \int\limits_{3\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2}\sin t\,\sqrt{2}|\mathrm{d}t| = 2\int\limits_{3\pi/4}^{\pi/4} \sin t\,(-\mathrm{d}t) = 2\cos t\,\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4}$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - (-\frac{1}{\sqrt{2}})\right) = 2\sqrt{2}$$

Soll der Bogen in Richtung wachsenden Parameters durchlaufen werden, könnte man z.B. die Parameterdarstellung $x(t) = -\sqrt{2}\cos t,\ y(t) = \sqrt{2}\sin t$ wählen, der Punkt $(-1,1)$ entspricht dann dem Parameterwert $t = \pi/4$, der Punkt $(1,1)$ dem Wert $t = 3\pi/4$. Weiterhin gilt dann $\mathrm{d}l = \sqrt{2}\mathrm{d}t$ und damit

$$\int\limits_{C_1} y\,\mathrm{d}l = \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{2}\sin t\,\sqrt{2}\mathrm{d}t = 2\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin t\,\mathrm{d}t = -2\cos t\,\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}$$
$$= -2\left(\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right) = -2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Bezüglich $\int\limits_{C_2} y\,\mathrm{d}l$ verbleiben wir bei der ersten (allgemein üblichen) Parameterdarstellung des Kreises. Die Rechnung ist dann die gleiche wie die gerade vorgeführte:

$$\int\limits_{C_2} y\,\mathrm{d}l = \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{2}\sin t\,\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin t\,\mathrm{d}t = -2\cos t\,\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}$$
$$= -2\left(\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right) = -2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Das Kurvenintegral 1. Art ist unabhängig von der Durchlaufrichtung der Kurve.

b) $$\int\limits_{C_1} \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \int\limits_{3\pi/4}^{\pi/4} (-\sqrt{2}\sin t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{2}\sin t\,\sqrt{2}\cos t\ \mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{2}\int\limits_{3\pi/4}^{\pi/4} (-\sin t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{3\pi/4}^{\pi/4} 2\sin t\,\mathrm{d}\sin t = \sqrt{2}\cos t\,\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} + \sin^2 t\,\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4}$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - (-\frac{1}{\sqrt{2}})\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

$$\int\limits_{C_2} \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} (-\sqrt{2}\sin t)\ \mathrm{d}t + \sqrt{2}\sin t\,\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{2}\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} (-\sin t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} 2\sin t\,\mathrm{d}\sin t = \sqrt{2}\cos t\,\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} + \sin^2 t\,\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}$$
$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

Das Kurvenintegral 2. Art hat bei Durchlaufen der Kurve in entgegengesetzter Richtung entgegengesetztes Vorzeichen.

c) Die Arbeit ist das in b) berechnete Integral. Somit ist für die Bewegung von $(-1,1)$ nach $(1,1)$ die Arbeit 2 erforderlich, in umgekehrter Richtung ist die Arbeit -2 erforderlich.

Wegen $\dfrac{\partial 1}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ handelt es sich bei $\vec{F}$ um ein konservatives Kraftfeld. Das folglich existierende Potenzial sei mit $P(x,y)$ bezeichnet.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1,\ P(x,y) = x + C(y),\ \frac{\partial P}{\partial y} = C'(y) = y,\ C(y) = \frac{y^2}{2} + D,\ P(x,y) = x + \frac{y^2}{2} + D.$$

Die Arbeit entspricht der Differenz zwischen $P(-1,1) = -1/2 + D$ und $P(1,1) = 3/2 + D$. Je nach Richtung ergibt sich 2 bzw. -2.

d) Masse = Dichte × Bogenlänge: $m = \int\limits_C \rho(x,y)\,\mathrm{d}l = \int\limits_C y\,\mathrm{d}l = 2\sqrt{2}$ (siehe a))

1. (statisches) Moment = Abstand × Dichte × Bogenlänge:
bezüglich x–Achse: $M_{x,1} = \int\limits_C y\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}l$, bezüglich y–Achse: $M_{y,1} = \int\limits_C x\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}l$

Schwerpunkt: $(x_S, y_S) = \left(\dfrac{M_{y,1}}{m}, \dfrac{M_{x,1}}{m}\right)$

$$M_{x,1} = \int\limits_C y\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}l = \int\limits_C y^2\,\mathrm{d}l = \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} 2\sin^2 t\,\sqrt{2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} 2\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t,\ 2\sin^2 t = 1 - \cos 2t$

$$M_{x,1} = \sqrt{2}\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} (1 - \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \sqrt{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$$

$$M_{y,1} = \int_C x\rho(x,y)\,\mathrm{d}l = \int_C xy\,\mathrm{d}l = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2\cos t\sin t\,\sqrt{2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2\sin t\ \mathrm{d}\sin t$$

$$= \sqrt{2}\sin^2 t\,\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Schwerpunkt: $\left(\dfrac{M_{y,1}}{m}, \dfrac{M_{x,1}}{m}\right) = \left(0\,, \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \left(0\,, \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right) \approx (0\,, 1.285)$