## Aufgabe 20.49

a) Untersuchen Sie die Vektorfelder $\vec{u}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1+yz \\ 1+zx \\ 1+xy \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} (x+1)\,yz \\ (y+1)\,zx \\ (z+1)\,xy \end{pmatrix}$ auf Quellen- und Wirbelfreiheit! Handelt es sich um Potenzialfelder? Bestimmen Sie im Falle der Existenz das Potenzial!

b) Berechnen Sie für die beiden Felder das Kurvenintegral 2. Art von $\vec{u}_i$ über dem Geradenstück vom Koordinatenursprung zum Punkt $(1,1,1)$. Sind diese Kurvenintegrale wegunabhängig?

**Lösung:**

a) $\operatorname{div}\vec{u}_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y} + \dfrac{\partial w_1}{\partial z} = 0+0+0 \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \quad \vec{u}_1(\vec{x})$ quellenfrei

$$\operatorname{rot}\vec{u}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1+yz & 1+zx & 1+xy \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x-x \\ -(y-y) \\ z-z \end{pmatrix} \equiv \vec{0} \implies \vec{u}_1(\vec{x}) \text{ wirbelfrei und damit Potenzialfeld}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = 1+yz,\quad U_1(x,y,z) = \int (1+yz)\,\mathrm{d}x + C(y,z) = x+xyz+C(y,z)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = xz + \frac{\partial C}{\partial y} = 1+zx \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 1,\quad C(y,z) = \int \mathrm{d}y + D(z) = y+D(z)$$

$$U_1(x,y,z) = x+y+xyz+D(z) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial U_1}{\partial z} = xy + D'(z) = 1+xy$$

$$\longrightarrow \quad D'(z) = 1,\quad D(z) = z+E,\quad \text{Potenzial: } \underline{\underline{U_1(x,y,z) = x+y+z+xyz+E}}$$

$\operatorname{div}\vec{u}_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial w_2}{\partial z} = yz+zx+xy \not\equiv 0 \qquad \Longrightarrow \quad \vec{u}_2(\vec{x})$ nicht quellenfrei

$$\operatorname{rot}\vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (x+1)\,yz & (y+1)\,zx & (z+1)\,xy \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (z+1)x-(y+1)x \\ -\big((z+1)y-(x+1)y\big) \\ (y+1)z-(x+1)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z-y)x \\ (x-z)y \\ (y-x)z \end{pmatrix} \not\equiv \vec{0}$$

$\Longrightarrow \quad \vec{u}_2(\vec{x})$ nicht wirbelfrei und damit kein Potenzialfeld

b) Geradenstück $C = \left\{ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 1 \right\}$

$$\int_C \vec{u}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_C (1+yz)\,\mathrm{d}x + (1+zx)\,\mathrm{d}y + (1+xy)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 3(1+t^2)\,\mathrm{d}t = 3\int_0^1 (1+t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$= 3\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 3\left(1+\frac{1}{3}\right) = 3\cdot\frac{4}{3} = \underline{\underline{4}}$$

Da das Vektorfeld $\vec{u}_1(\vec{x})$ ein Potenzialfeld ist, ist das Kurvenintegral wegunabhängig. Es ergibt sich auch als Potenzialdifferenz: $U_1(1,1,1) - U_1(0,0,0) = 4+E-E = 4$.

$$\int_C \vec{u}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_C (x+1)yz\,\mathrm{d}x + (y+1)zx\,\mathrm{d}y + (z+1)xy\,\mathrm{d}z = \int_0^1 3(t+1)\,t^2\,\mathrm{d}t = 3\int_0^1 (t^3+t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$= 3\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = 3\cdot\frac{7}{12} = \underline{\underline{\frac{7}{4}}}$$

Da das Vektorfeld $\vec{u}_2(\vec{x})$ kein Potenzialfeld ist, ist das Kurvenintegral nicht wegunabhängig.