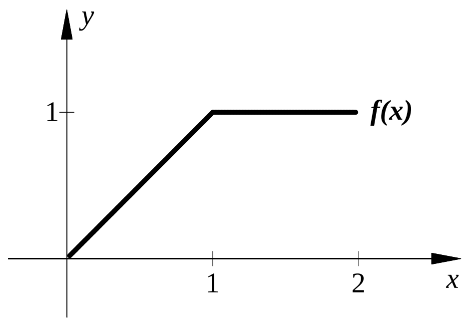
Aufgabe 20.47

Über dem Intervall $[0,2]=\{x\in\mathbb{R}:0\leq x\leq 2\}$ sei die in der Abbildung dargestellte Funktion $f(x)$ definiert, ihr Graph werde als Kurve C bezeichnet.



Berechnen Sie für die Kraftfelder

a) $\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix}x+y\\-x\end{pmatrix}$ und b) $\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$

welche Arbeit erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 längs der Kurve C von $(0,0)$ nach $(2,1)$ zu bewegen! Welches der Felder ist konservativ? Geben Sie für dieses auch die potenzielle Energie an!

Lösung:

Die Kurve C wird durch $y=x$, d.h. $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}$, $\mathrm{d}\vec{x}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}x\end{pmatrix}$, $0\leq x\leq 1$ und durch $y=1$, d.h. $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{d}\vec{x}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\0\end{pmatrix}$, $1\leq x\leq 2$ beschrieben.

$$\text{a) } W=\int\limits_C\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{x}=\int\limits_0^1\begin{pmatrix}2x\\-x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}x\end{pmatrix}+\int\limits_1^2\begin{pmatrix}x+1\\-x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\0\end{pmatrix}=\int\limits_0^1x\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=\frac{1}{2}+2+2-\frac{1}{2}-1=\underline{\underline{3}}$$

$$\text{b) } W=\int\limits_C\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{x}=\int\limits_0^1\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}x\end{pmatrix}+\int\limits_1^2\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\0\end{pmatrix}=2\int\limits_0^1x\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\mathrm{d}x=[x^2]_0^1+[x]_1^2=1+2-1=\underline{\underline{2}}$$

Konservativität

a) $\dfrac{\partial(x+y)}{\partial y}=1\neq -1=\dfrac{\partial(-x)}{\partial x}$: nicht konservativ

b) $\dfrac{\partial y}{\partial y}=1=\dfrac{\partial x}{\partial x}$: konservativ

$\dfrac{\partial P}{\partial x}=y$, $P(x,y)=yx+C(y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x+C'(y)=x$, $C'(y)=0$, $C(y)=C$, $\underline{\underline{P(x,y)=xy+C}}$

Daraus ergibt sich auch die Arbeit: $W=P(2,1)-P(0,0)=\underline{\underline{2}}$.