Aufgabe 20.46

Gegeben seien die Punkte $A(4,2)$, $B(2,0)$ und $O(0,0)$ sowie die geradlinigen Wege C_1 von O nach A und C_2 von O über B nach A. Berechnen Sie für die Kraftfelder

a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix}$ und b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

welche Arbeit erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 auf diesen Wegen von O nach A zu bewegen! Welches der Felder ist konservativ? Geben Sie für dieses auch die potenzielle Energie an!

Lösung:

Arbeit (skalare Größe) = Kraft · Weg (Skalarprodukt zweier vektorieller Größen):

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_C \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy :$$

Kurvenintegral 2. Art (Integral über die Projektion der Kurve auf die Koordinatenachsen, also über dx und dy, nicht über dl)

Ist C die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t_1 \le t \le t_2$ so ergibt sich wegen $dx = \dot{x}(t)\,dt$, $dy = \dot{y}(t)\,dt$

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)\,dt + Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\,dt.$$

C_1 von O nach A: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$

C_2 von O nach B: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$ und

von B nach A: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2t \\ 2t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$

a) $$W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{C_1} (x+y)\,dx - x\,dy = \int_0^1 ((4t+2t)\,4\,dt - 4t \cdot 2\,dt) = \int_0^1 16t\,dt = 16\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \underline{\underline{8}}$$

$$W_2 = \int_{C_2} (x+y)\,dx - x\,dy = \int_0^1 ((2t+0)\,2\,dt - 2t \cdot 0\,dt) + \int_0^1 ((2+2t+2t)\,2\,dt - (2+2t) \cdot 2\,dt)$$

$$= \int_0^1 4t\,dt + \int_0^1 (8t+4-(4t+4))\,dt = \int_0^1 8t\,dt = 8\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \underline{\underline{4}}$$ $W_1 \ne W_2$, wegabhängig

b) $$W_1 = \int_{C_1} y\,dx + x\,dy = \int_0^1 (2t \cdot 4\,dt + 4t \cdot 2\,dt) = \int_0^1 16t\,dt = 16\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \underline{\underline{8}}$$

$$W_2 = \int_{C_2} y\,dx + x\,dy = \int_0^1 (0 \cdot 2\,dt + 2t \cdot 0\,dt) + \int_0^1 (2t \cdot 2\,dt + (2+2t)\,2\,dt)$$

$$= 0 + \int_0^1 (8t+4)\,dt = 4t^2 + 4t\Big|_0^1 = \underline{\underline{8}}$$ $W_1 = W_2$, gleiche Arbeit für beide Wege

Ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$ heißt **konservatives Feld** oder **Potenzialfeld**, wenn es Gradient eines Skalarfeldes $U(\vec{x})$ ist, d.h. $\vec{F} = \operatorname{grad} U = \nabla U$. $U(\vec{x})$ heißt dann Potenzial des Vektorfeldes.

Ist $\vec{F}$ ein Kraftfeld, dann ist das Potenzial U die (potenzielle) Energie.

„Konservativ“: Es gilt der Energieerhaltungssatz.

Das Kurvenintegral 2. Art $\int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ ist genau dann wegunabhängig, wenn $\vec{F}$ ein Potenzialfeld, d.h. konservativ ist. Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ gilt.

Im Falle a) gilt $\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x+y & -x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, das Feld ist nicht konservativ, das Integral i.A. wegabhängig.

Im Falle b) gilt $\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \vec{0}$, also wegunabhängig, konservatives Kraftfeld. In dem Feld gilt der Energieerhaltungssatz. Potenzial des Feldes ist die potenzielle Energie $U(x,y)$:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \nabla U$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y, \quad U(x,y) = \int y \,\mathrm{d}x = xy + D(y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x + D'(y) = x \longrightarrow D'(y) = 0, \; D(y) = D$$

Potenzielle Energie: $U(x,y) = xy + D$,
Arbeit für Bewegung von O nach A unabhängig vom Weg: $W = U(4,2) - U(0,0) = \underline{\underline{8}}$