

### Aufgabe 20.44

In einem Gelände der Höhe  $h(x,y) = 400 - \frac{x^2 + y^2}{2500}$  wird vom Berggipfel bei  $(x,y) = (0,0)$  zum auf Höhengniveau 0 befindlichen Meer längs  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 t \cos t \\ 100 t \sin t \end{pmatrix}$ ,  $t \geq 0$ , eine Straße gebaut. Beschreiben Sie den Straßenverlauf durch eine dreidimensionale Vektorfunktion und berechnen Sie die Länge der Straße!

**Hinweis:**  $\int \sqrt{t^2 + a^2} dt$  kann Formelsammlungen entnommen werden.

### Lösung:

Auf der Straße gilt  $z = h(x(t), y(t)) = 400 - \frac{10000t^2 \cos^2 t + 10000t^2 \sin^2 t}{2500} = 400 - 4t^2$ . Also

verläuft die Straße längs  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 100 t \cos t \\ 100 t \sin t \\ 400 - 4t^2 \end{pmatrix}$ . Beim Berggipfel gilt  $t = 0$ ; das Meer wird für

$400 - 4t^2 = 0$ , also für  $t = 10$  erreicht.

$$l = \int_C dl = \int_0^{10} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt$$

$$\begin{aligned} (\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2 &= (100(\cos t - t \sin t))^2 + (100(\sin t + t \cos t))^2 + (-8t)^2 = \\ &= 10000(\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t) + 64t^2 = 10000 + 10064t^2 \end{aligned}$$

Die Stammfunktion von  $\sqrt{t^2 + a^2}$  kann besseren Formelsammlungen entnommen werden, z.B. der des [Lehrbuchs der Mathematik](#) aus [Wikibooks](#). Dort findet sich für  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$  die Stammfunktion  $\int r dx = \frac{1}{2}(xr + a \ln(x+r))$  (zur Ermittlung der Stammfunktion durch Rückführung auf ein Grundintegral s. Lösung zu Aufgabe 13.86c)).

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{10} \sqrt{10064t^2 + 10000} dt = \sqrt{10064} \int_0^{10} \sqrt{t^2 + \frac{10000}{10064}} dt \\ &= \frac{\sqrt{10064}}{2} \left( t \sqrt{t^2 + \frac{10000}{10064}} + \frac{10000}{10064} \ln \left( t + \sqrt{t^2 + \frac{10000}{10064}} \right) \right) \Big|_0^{10} \\ &\approx 5190.26620 - (-0.15898) = 5190.42518 \end{aligned}$$

Also ist die Straße ca. 5190.4 Längeneinheiten lang.