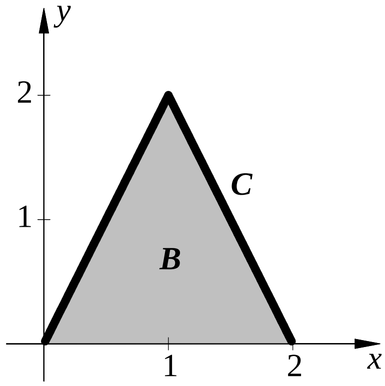
Aufgabe 20.43

Über dem Intervall $[0,2]=\{x\in\mathbb{R}:\ 0\le x\le 2\}$ sei die in der Abbildung fett dargestellte Funktion $f(x)$ definiert, ihr Graph werde als Kurve C bezeichnet, die von ihr und der x-Achse begrenzte Fläche werde mit B bezeichnet.

a) Die Kurve C sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y)=2-x+y$ belegt. Berechnen Sie ihre Masse!

b) Die Fläche B sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y)=2-x+y$ belegt. Berechnen Sie ihre Masse!



Lösung:

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1\\ 4-2x, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

a) $$m=\int_C \rho\,\mathrm{d}l=\int_C (2-x+y)\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

$$=\int_0^1 (2-x+2x)\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(2\mathrm{d}x)^2}+\int_1^2 (2-x+4-2x)\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(-2\mathrm{d}x)^2}$$

$$=\sqrt{5}\int_0^1 (2+x)\,\mathrm{d}x+\sqrt{5}\int_1^2 (6-3x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{5}\left[2x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\sqrt{5}\left[6x-\frac{3x^2}{2}\right]_1^2$$

$$=\sqrt{5}\left(2+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{5}\left(12-6-6+\frac{3}{2}\right)=\sqrt{5}\left(2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=\underline{\underline{4\sqrt{5}\approx 8.94}}$$

b) $$m=\iint_B \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^{2x}(2-x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_1^2\int_0^{4-2x}(2-x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[(2-x)y+\frac{y^2}{2}\right]_0^{2x}\mathrm{d}x+\int_1^2\left[(2-x)y+\frac{y^2}{2}\right]_0^{4-2x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 (4x-2x^2+2x^2)\,\mathrm{d}x+\int_1^2\left((2-x)\cdot 2(2-x)+\frac{4(2-x)^2}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 4x\,\mathrm{d}x+4\int_1^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x=2x^2\Big|_0^1-\frac{4}{3}\,(2-x)^3\Big|_1^2=2+\frac{4}{3}=\underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$