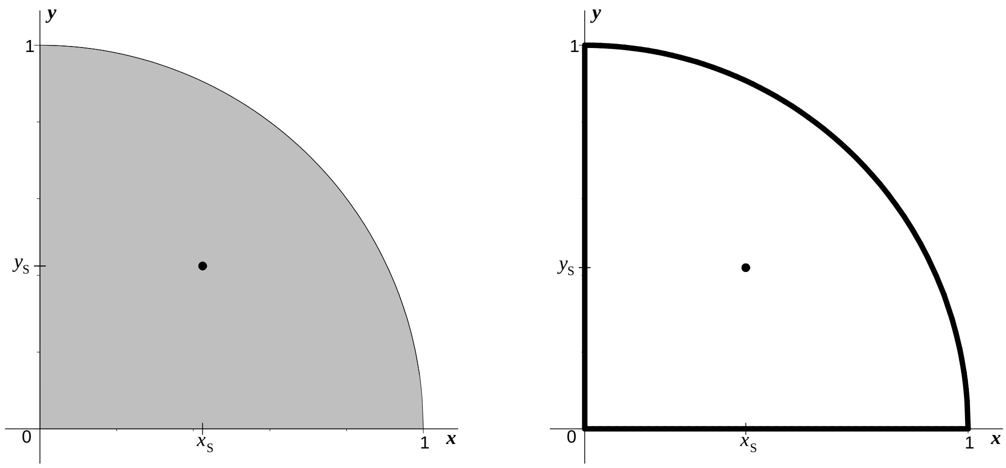
Aufgabe 20.42

Berechnen Sie den Schwerpunkt des im I. Quadranten liegenden Sektors des Einheitskreises sowie den Schwerpunkt der Berandungskurve des Kreissektors (geschlossene Kurve)!

Lösung:

Da die Dichte konstant ist, kann mit der Dichte 1 gerechnet werden, d.h. statt der Masse der Flächeninhalt bzw. die Bogenlänge verwendet werden.



Kreissektor (Fläche):

$$B=\left\{(r,\varphi):\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$A=\iint_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$$ (ist auch ohne Integration bekannt)

$$M_{y,1}=\iint_B x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\cos\varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{3}\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}$$

$$M_{x,1}=\iint_B y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\sin\varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=-\frac{1}{3}\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}$$

($=M_{y,1}$ aus Symmetriegründen)

Schwerpunkt der Fläche: $(x_S,y_S)=\left(\frac{M_{y,1}}{A},\frac{M_{x,1}}{A}\right)=\left(\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi}\right)\approx(0.424,0.424)$

Berandungskurve:

$$C=\left\{\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}\cup\left\{\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix},\ 0\le t\le 1\right\}\cup\left\{\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix},\ 0\le t\le 1\right\}$$

$$l=\int_C \mathrm{d}l=\int_C\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^1\sqrt{1^2+0^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^1\sqrt{0^2+1^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}+2$$

(ist auch ohne Integration klar)

$$M_{y,1} = \int_C y\,\mathrm{d}l = \int_0^{\pi/2} \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 0\,\sqrt{1^2+0^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\,\sqrt{0^2+1^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\pi/2} + \left[t^2/2\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$M_{x,1} = \int_C x\,\mathrm{d}l = \int_0^{\pi/2} \cos t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\,\sqrt{1^2+0^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 0\,\sqrt{0^2+1^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\pi/2} + \left[t^2/2\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad (= M_{y,1} \text{ wegen Symmetrie})$$

Schwerpunkt der Kurve: $(x_S, y_S) = \left(\frac{M_{y,1}}{l}, \frac{M_{x,1}}{l}\right) = \left(\frac{3}{4+\pi}, \frac{3}{4+\pi}\right) \approx (0.420, 0.420)$