Aufgabe 20.40

Die Einheitskreislinie $x^2+y^2=1$ sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y)=1+y^2$ belegt. Berechnen Sie die Masse der Kreislinie!

Lösung:

Parameterdarstellung des Einheitskreises: $x(t)=\cos t,\ y(t)=\sin t,\ 0\le t<2\pi$,

Bogendifferential: $\mathrm{d}s=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}t$,

Masse $=$ Dichte (in Masseneinheit pro Längeneinheit) mal Länge, bei variabler Dichte also

$$m=\int\limits_K \rho(x,y)\,\mathrm{d}s=\int\limits_K (1+y^2)\,\mathrm{d}s=\int\limits_0^{2\pi}(1+\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$

Für die Auswertung des Integrals $\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t$ gibt es mehrere Möglichkeiten:

Verwendung der Formel $\cos 2t=1-2\sin^2 t \implies \sin^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$ und anschließende Integration

oder partielle Integration $\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t=-\cos t\sin t+\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t=-\cos t\sin t+\int (1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$

$$=-\cos t\sin t+t-\int \sin^2\,\mathrm{d}t \implies \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{t-\sin t\cos t}{2}$$

oder Benutzung einer Formelsammlung, die z.B. die Formel $\int \sin^2 ax\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4a}\sin 2ax$ enthält.

$$m=\int\limits_0^{2\pi}(1+\sin^2 t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+\frac{\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t+\frac{\sin 2t}{4}\Bigg|_0^{2\pi}=\underline{\underline{3\pi}}$$