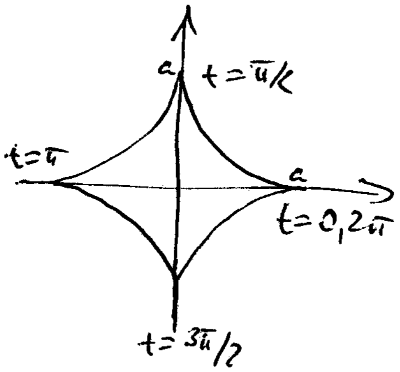
Aufgabe 20.39

Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers, der bei der Rotation der Astroide $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le \pi$ um die x-Achse entsteht!

Lösung:



$$U = 2\pi r$$

$$\mathrm{d}O = 2\pi r\,\mathrm{d}s = 2\pi y\,\mathrm{d}s = 2\pi y\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$
$$= 2\pi y(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

$$O = 2\pi\int_0^{\pi} y(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 4\pi\int_0^{\pi/2} y(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

$$(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2 = (-3a\cos^2 t\,\sin t)^2+(3a\sin^2 t\,\cos t)^2 = 9a^2(\cos^4 t\,\sin^2 t+\sin^4 t\,\cos^2 t)$$
$$= 9a^2\cos^2 t\,\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t) = 9a^2\cos^2 t\,\sin^2 t$$

Für $0 \le t \le \pi/2$ folgt $\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2} = 3a\sin t\,\cos t$.

$$O = 4\pi\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\,3a\sin t\,\cos t\,\mathrm{d}t = 12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\,\mathrm{d}\sin t = 12\pi a^2\left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{12}{5}\pi a^2}}$$