

Aufgabe 20.37

Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \\ 2t \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie die Länge des Kurvensegments für $0 \leq t \leq \pi$!
- Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $\vec{x}(\pi)$ an!

Lösung:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \cos t - t^2 \sin t \\ 2t \sin t + t^2 \cos t \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \|\dot{\vec{x}}(t)\| &= \sqrt{4t^2 \cos^2 t - 4t^3 \cos t \sin t + t^4 \sin^2 t + 4t^2 \sin^2 t + 4t^3 \sin t \cos t + t^4 \cos^2 t + 4} \\ &= \sqrt{4t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + t^4(\sin^2 t + \cos^2 t) + 4} = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 4} = \sqrt{(t^2 + 2)^2} = t^2 + 2 \end{aligned}$$

$$l = \int_0^{\pi} \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt = \int_0^{\pi} (t^2 + 2) dt = \left. \frac{t^3}{3} + 2t \right|_0^{\pi} = \underline{\underline{\frac{\pi^3}{3} + 2\pi \approx 16,62}}$$

$$\text{b) } \vec{x}(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi^2 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(\pi) = \begin{pmatrix} -2\pi \\ \pi^2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{\text{Tangente}}(u) = \begin{pmatrix} -\pi^2 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2\pi \\ \pi^2 \\ 2 \end{pmatrix}$$